

Simulación de órbitas

V.P.Molinari, M.N.Riccillo

Departamento de Física

Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González

Resumen

El objetivo de este artículo es crear un programa que nos permita simular los movimientos orbitales de un cuerpo. Los valores obtenidos con el mismo nos permiten estudiar el tipo de trayectoria que realiza.

1. Introducción

La gravitación es la fuerza de atracción mutua que experimentan los cuerpos por el hecho de tener una masa determinada. La existencia de dicha fuerza fue establecida por el matemático y físico inglés Isaac Newton en el s. XVII.

La ley de gravitación universal afirma que la fuerza de atracción que experimentan dos cuerpos dotados de masa es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Esta ley incluye una constante de proporcionalidad que recibe el nombre de constante de la gravitación universal.

Si consideramos un sistema aislado formado por dos cuerpos, donde uno gira alrededor del otro teniendo el primero una masa mucho menor que el segundo y describiendo una órbita estable. Podemos plantear el movimiento descrito por los mismos en base a la segunda ley de Newton.

Para ello creamos un simulador con el programa Matlab que nos sirviera como herramienta para poder analizar los movimientos descritos por los cuerpos.

A continuación se detallan los pasos seguidos y las consideraciones adoptadas para su resolución:

En la sección 2.1 se analiza el planteamiento newtoniano para el problema de los dos cuerpos. En la sección 2.2 se explica de manera breve las partes de la elipse, en la 2.3 se crea el simulador. En la 2.4 se realizan las simulaciones y el análisis de los datos obtenidos.

2. Interacción entre dos cuerpos

2.1. Newton y el movimiento planetario

Newton enunció para estudiar el movimiento planetario el problema de los dos cuerpos. Este consiste en el estudio dinámico de dos objetos masivos en el ámbito de su influencia mutua.

Supongamos un sistema aislado de dos partículas, m_1 y m_2 , que interactúan entre sí. Sobre m_1 actúa una fuerza \vec{F}_{12} debido a m_2 , y sobre la partícula m_2 actúa la fuerza \vec{F}_{21} debido a m_1 . Ambas fuerzas son iguales en módulo y de sentido contrario.

Si las posiciones están dadas por \vec{r}_1 , posición de la partícula 1 respecto a un sistema de referencia arbitrario, \vec{r}_2 posición de la partícula 2 respecto al mismo sistema y \vec{r} posición de la partícula 2 respecto de la 1. (Fig. 1)

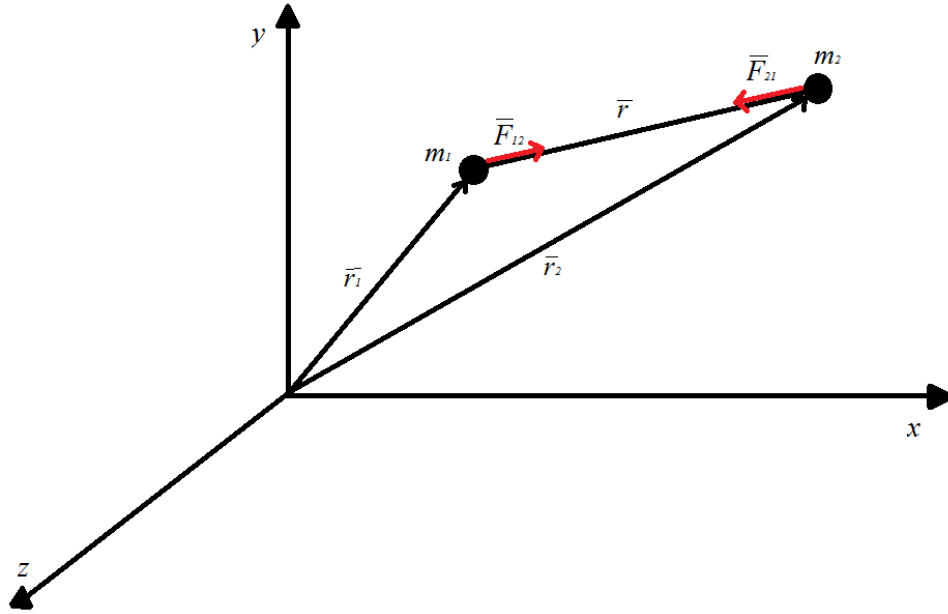


Fig. 1 – Partículas 1 y 2 respecto a un sistema de referencia inercial arbitrario

De acuerdo con la ley de la gravitación, las partículas se atraen mutuamente, y la fuerza tiene la misma dirección que la recta que une sus centros según:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^2} \quad (2.1.1)$$

donde G es la constante de la gravitación universal y su valor es de $6,673 \cdot 10^{-11} [m^3 kg^{-1} s^{-2}]$. (Fundamental Astronomy, 2007)

Como suponemos que sobre las masas m_1 y m_2 no actúan otras fuerzas que las de atracción, podemos escribir sus ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \\ m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Donde

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.1.3)$$

Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones (2.1.2), obtenemos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \quad (2.1.4)$$

Si multiplicamos la ecuación (2.1.3) por m_2 y le restamos la ecuación (2.1.4) obtenemos:

$$(m_1 + m_2) \ddot{\vec{r}}_1 = -m_2 \ddot{\vec{r}} \quad (2.1.5)$$

Despejando

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\vec{r} \quad (2.1.6)$$

Procediendo de manera análoga obtenemos

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\vec{r} \quad (2.1.7)$$

Derivando dos veces y sustituyendo en (2.1.2) nos queda

$$\begin{cases} m_1 \cdot \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \ddot{\vec{r}} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \\ m_2 \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \end{cases} \quad (2.1.8)$$

En ambos casos nos queda que

$$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \quad (2.1.9)$$

Llamemos μ a la masa reducida del sistema

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.1.10)$$

Reemplazando (2.1.10) en (2.1.9) obtenemos

$$\mu \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \quad (2.1.11)$$

Si m_1 es mucho mayor que m_2 entonces nos queda

$$\mu = \frac{m_2}{\frac{m_2}{m_1} + 1} \simeq m_2 \quad (2.1.12)$$

Entonces la ecuación de movimiento es aproximadamente la de m_2 .

Si queremos estudiar el movimiento de un satélite, meteorito, etc.; bajo la atracción terrestre, la Tierra será el origen de nuestro sistema de referencia. Siendo las ecuaciones del movimiento expresadas en coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{GmMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ m\ddot{y} = -\frac{GmMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ m\ddot{z} = -\frac{GmMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (2.1.13)$$

El momento cinético del sistema se conserva ya que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{f} \quad (2.1.14)$$

En este caso nos queda

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = |\vec{r}| \cdot |\vec{f}| \cdot \sin 180^\circ \quad (2.1.15)$$

Donde

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (2.1.16)$$

Este resultado nos indica que la trayectoria realizada por el cuerpo se encuentra en un único plano.

2.2. Una herramienta necesaria: La elipse

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante. Estos puntos fijos se llaman focos de la elipse (F_1 y F_2). La recta que pasa por ellos se denomina eje focal y corta a la elipse en dos puntos llamados vértices (V y V'). El segmento VV' es el eje mayor, de longitud igual a $2a$, el punto medio el centro C de la elipse. El eje normal al segmento VV' que pasa por C se llama eje menor y su longitud es igual a $2b$. El segmento que une F_1 y F_2 se denomina distancia focal y su longitud es igual a $2c$.

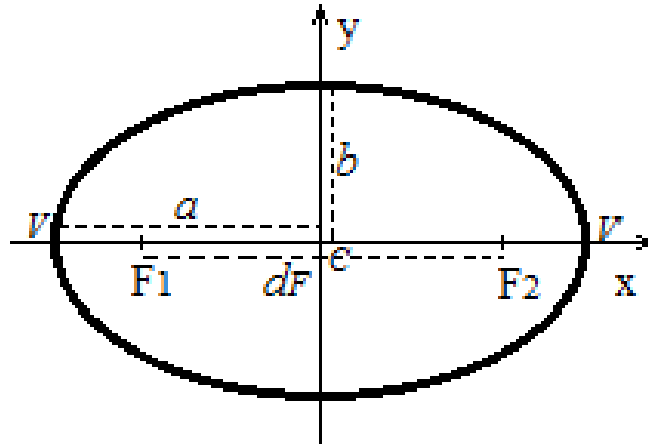


Fig. 2 – Gráfica de una elipse

La relación entre la distancia focal y los semiejes está dada por:

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad (2.2.1)$$

La excentricidad de una elipse es el número que mide el mayor o menor “achataamiento” de la misma. Es igual:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (2.2.2)$$

Donde $c \leq a$ y $0 \leq e \leq 1$

Los focos de la elipse son dos puntos equidistantes del centro, F_1 y F_2 en el eje mayor. La suma de las distancias desde cualquier punto P de la elipse a los dos focos es constante, e igual a la longitud del diámetro mayor.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \quad (2.2.3)$$

2.3. Creando un simulador

Con el fin de simular movimientos orbitales de distintos cuerpos creamos un programa con Matlab. Este programa requiere que el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1.13) sea de primer orden. Para ello realizamos los cambios de variables correspondientes y despreciamos la ecuación que corresponde a la coordenada en el eje z.

Las transformaciones propuestas son:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = y \\ x_4 = \dot{y} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Por lo que nos queda:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{G \cdot M}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} x_1 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = -\frac{G \cdot M}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}} x_3 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Para crear el simulador primero generamos el programa movplanet con el editor de Matlab de la siguiente forma:

```
function xprima=movplanet(t, x)
```

```
global G M
```

```
GM= G*M;
```

```
r= sqrt((x(1)^2)+(x(3)^2));
```

```
r3=r^3;
```

```
xprima(1)=x(2);
```

```
xprima(2)=-GM*x(1)/r3;
```

```
xprima(3)=x(4);
```

```
xprima(4)=-GM*x(3)/r3;
```

```
xprima=xprima';
```

Luego con este programa creamos DIAS (Dynamic Interaction plAnetary Simulation) para simular el movimiento planetario. Lo armamos con el editor según:

```
global G M
```

```
G=6.67e-11; %Constante de gravitación universal
```

```
d2r=pi/180.0; %Conversión de grados a radianes
```

```
M = input ('Ingrese masa del cuerpo central [kg]= ');
```

```

disp ('Condiciones iniciales:');

x0 = input ('Ingrese coordenada x inicial [m]= ');

y0 = input ('Ingrese coordenada y inicial [m]= ');

v0 = input ('Ingrese módulo de la v inicial [m/s]= ');

alpha = input ('Ingrese el alpha de la velocidad respecto de la vertical externa local [°]= ');

tf = input ('Ingrese el tiempo final [s]= ');

x(1)=x0;           % Coordenada x

x(2)=v0*sin(alpha*d2r); % Componente x de la velocidad

x(3)=y0;           % Coordenada y

x(4)=v0*cos(alpha*d2r); % Componente y de la velocidad

t = 0:200:tf;

[t,x]=ode45('movplanet',t,x);

```

Con estos dos programas se realizamos diversas simulaciones.

2.4. Realizando las simulaciones

Simulamos diversos lanzamientos desde la superficie terrestre hasta que logramos poner en órbita el cuerpo. Para ello tomamos como condiciones iniciales los siguientes valores:

$$G = 6.67E - 11[m^3kg^{-1}s^{-2}]$$

$$M = 5.94E24 [kg]$$

$$x_0 = 0 [m]$$

$$y_0 = 6.6E6 [m]$$

Los lanzamientos realizados son los siguientes:

Lanzamientos	α [°]	v_0 [m/s]
A	50	5000
B	50	6000
C	50	7000
D	90	8000
E	90	9000

Tabla 1 – En esta tabla figuran los lanzamientos realizados con sus respectivas velocidades iniciales (v_0)

Con los valores de las posiciones en función del tiempo que obtuvimos con el simulador graficamos para visualizar cuales de los lanzamientos logramos poner en órbita.

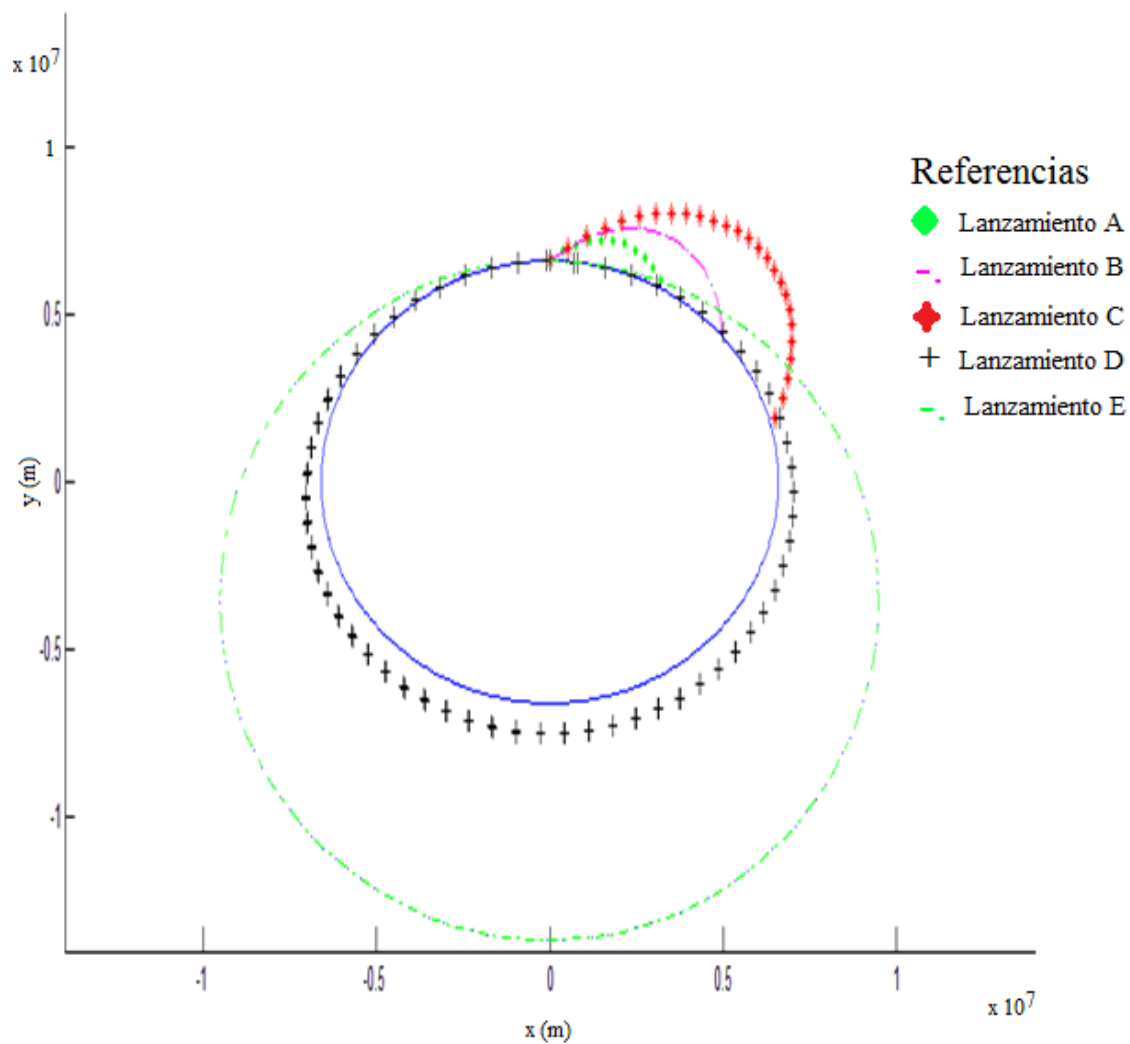


Fig. 3 – Se observan las posiciones de los distintos lanzamientos.

Podemos observar en la Fig. 2 que los lanzamientos que lograron ponerse en órbita fueron el D y el E. A partir de estas condiciones pusimos en órbita cinco cuerpos con distintas velocidades iniciales. Siendo sus valores los siguientes:

Lanzamientos	α [°]	v_0 [m/s]
1	90	8000
2	90	8500
3	90	9000
4	90	9500
5	90	10000

Tabla 2 – En esta tabla figuran los lanzamientos realizados con sus respectivas velocidades iniciales (v_0)

Para poder verificar si las trayectorias que representan las posiciones de los lanzamientos son elipses calculamos las distancias (r_1 y r_2) de cada posición adoptada por los cuerpos hacia los focos y luego las sumamos. Según:

$$d = \sqrt{(x_p - x_{F1})^2 + (y_p - y_{F1})^2} + \sqrt{(x_p - x_{F2})^2 + (y_p - y_{F2})^2} \quad (2.4.1)$$

Donde x_p e y_p son las coordenadas de las posiciones que adoptan los cuerpos y x_F e y_F las coordenadas de los focos.

Para calcular las coordenadas de los focos utilizamos los valores de a (semieje mayor) y b (semieje menor) que nos proporcionó el simulador. Obtuvimos los siguientes valores:

Lanzamiento	a [m]	b [m]	E	d_F [m]	x_{Centro} [m]	y_{Centro} [m]	Foco 1 [m]	Foco 2 [m]
1	7,05E+06	7,02E+06	0,091	6,44E+05	0	-4,45E+05	(0; 1,99E5)	(0; -1,09E6)
2	8,26E+06	8,09E+06	0,204	1,69E+06	0	-1,66E+06	(0; 2,30E4)	(0; -3,35E6)
3	1,01E+07	9,48E+06	0,351	3,56E+06	0	-3,53E+06	(0; 2,90E4)	(0; -7,09E6)
4	1,33E+07	1,15E+07	0,503	6,68E+06	0	-6,69E+06	(0; -1,00E4)	(0; -1,34E7)
5	1,98E+07	1,48E+07	0,665	1,32E+07	0	-1,32E+07	(0; 3,50E4)	(0; -2,64E7)

Tabla 3 – En esta tabla figuran los valores obtenidos para cada lanzamiento.

Con los valores obtenidos graficamos $(r_1 + r_2)$ en función del tiempo para todos los lanzamientos.

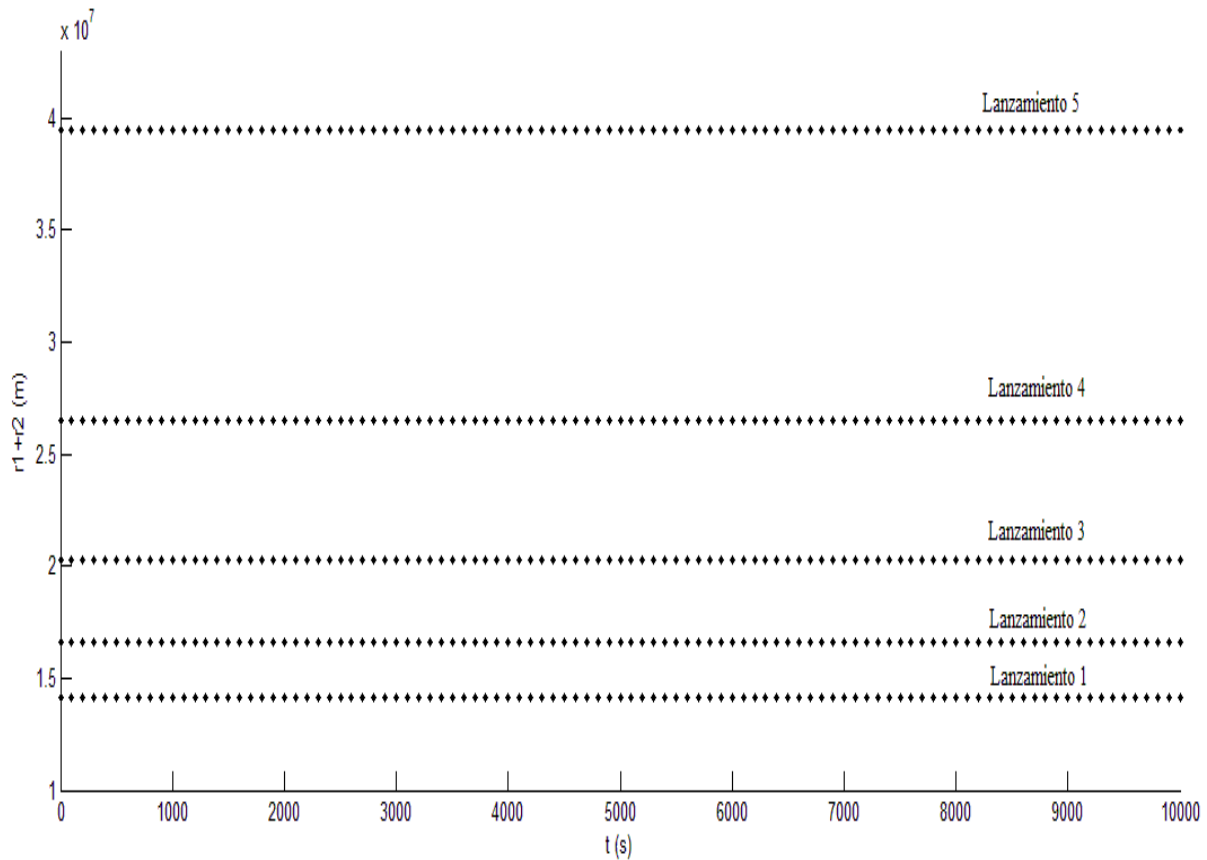


Fig. 4 – Figura obtenida de graficar $(r_1 + r_2)$ en función del tiempo para los cinco lanzamientos.

Al graficar $(r_1 + r_2)$ en función del tiempo observamos que para cada lanzamiento se mantienen constantes, lo cual corresponde con las propiedades de la elipse citadas en la sección 2.3*

Para verificar que las áreas barridas en intervalos regulares del tiempo es constante graficamos $\Delta\mathcal{A}$ en función del tiempo.

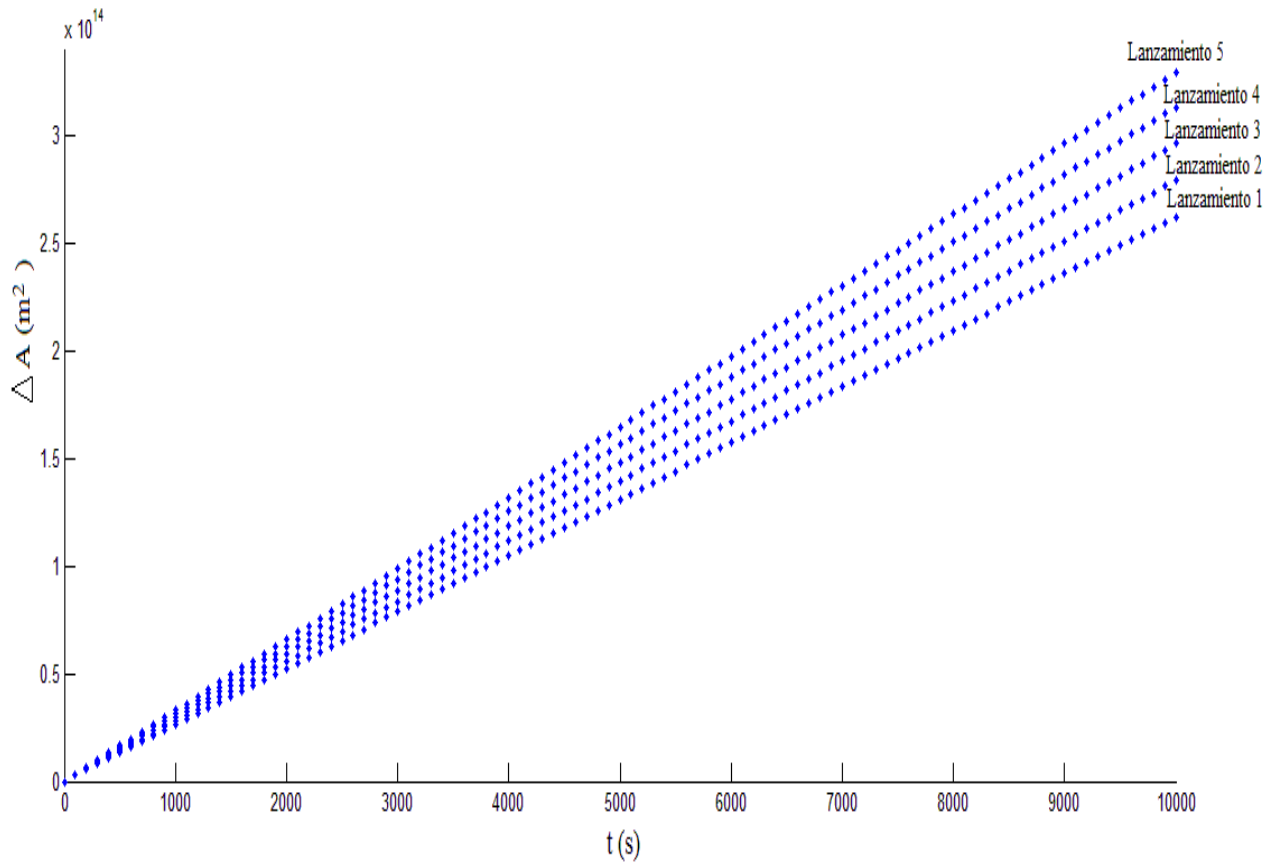


Fig. 5 – Gráfico de $\Delta\mathcal{A}$ en función del tiempo para los cinco lanzamientos.

Al graficar $\Delta\mathcal{A}$ en función del tiempo observamos una relación de proporcionalidad directa.

Para verificar que el cuadrado de los períodos orbitales (P) de los cuerpos es proporcional a la distancia media (a) se realizó un gráfico Log-Log de P en función de a según:

$$P^2 = k \cdot a^3 \quad (2.4.2)$$

Aplicando logaritmo en ambos miembros

$$2 \cdot \log P = \log k + 3 \cdot \log a \quad (2.4.3)$$

Despejando

$$\log P = \frac{3}{2} \log a + \frac{1}{2} \log k \quad (2.4.4)$$

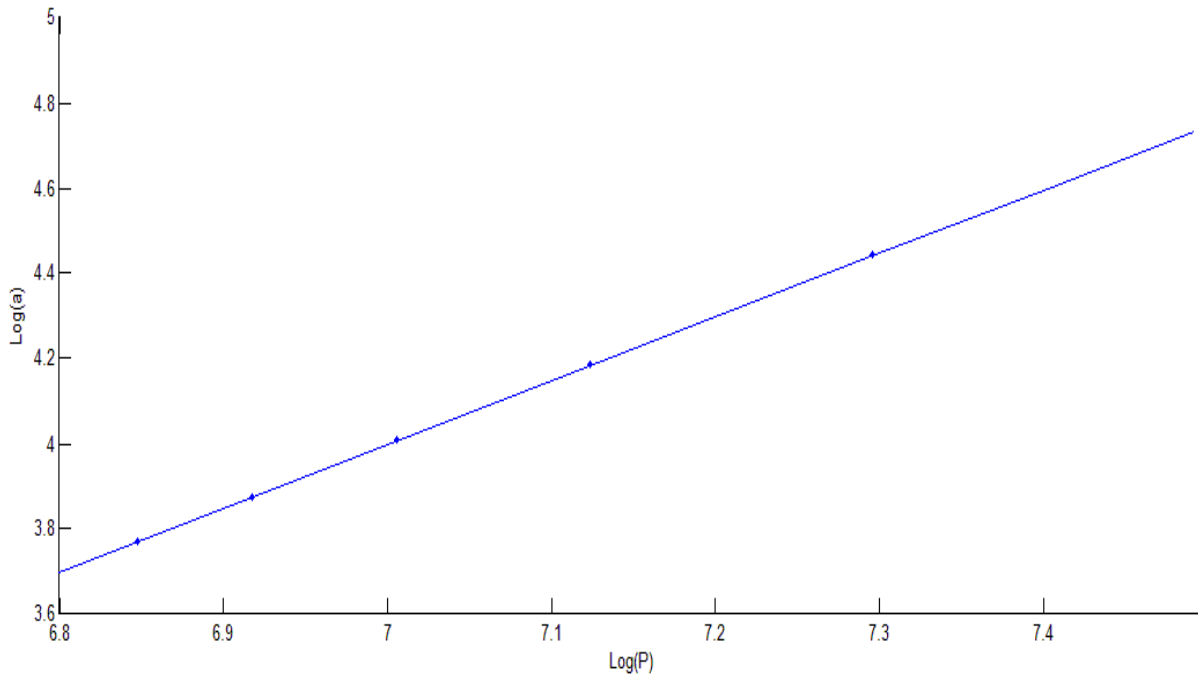


Fig. 6 – Gráfico log-log de P en función de a .

En el gráfico se utilizó una línea de tendencia que verificó la relación existente entre el cuadrado del período orbital y la distancia media.

3. Conclusiones

Observando la fig. 4 que obtenemos de graficar $(r_1 + r_2)$ en función del tiempo y habiendo visto su correspondencia con la propiedad de la elipse, podemos decir que los satélites lanzados alrededor de la tierra describen órbitas elípticas situando a la Tierra en uno de sus focos. De esta manera podemos colegir la primera ley de Kepler que dice: "Los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el mismo situado en uno de sus focos" (1609).

De la fig. 5 obtenemos una relación lineal para cada lanzamiento, lo que implica que cada satélite barre áreas iguales en intervalos regulares de tiempo. De esta manera colegimos la segunda ley de Kepler que dice: "El radio vector que une al planeta y al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales" (1609).

Analizando la fig. 6 encontramos que la relación lineal obtenida nos da una ecuación lineal cuyos valores son:

$$f_{(x)} = 1.49x - 6.46 \quad (3.1.1)$$

Comparando con la ecuación (2.4.4) vemos que la pendiente que esperamos obtener es de 1.5. Siendo un valor muy cercano al obtenido por el simulador.

En base a estos valores podemos calcular cual es la constante que presenta la órbita que tiene como foco a la Tierra.

$$k = 1.2E - 13$$

De esta manera podemos colegir la tercera ley de Kepler que dice: "El cuadrado de los períodos orbitales de los planetas es proporcional a la distancia media del mismo al Sol" (1618).

En conclusión podemos decir que si bien las leyes de Kepler sirven para describir matemáticamente el movimiento de los planetas alrededor del Sol, también lo hacen para cualquier otro cuerpo masivo.

4. Referencias

- Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K. *Fundamental Astronomy*, 5ta edición, 2007.
- Molinari V.P., Riccillo M.N. *Simulación de órbitas*, 1ra edición, 2011.

Bibliografía

- Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K. *Fundamental Astronomy*, 5ta edición, 2007.
- Lehmann C., *Geometría Analítica*, 1ra edición, 1989, Ed. Limusa