

Máxima Verosimilitud en Cosmología de Braneworld

Alexander Moreno Sánchez
Universidad Nacional de Colombia
Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá D. C, Colombia.
amorenosa@unal.edu.co

Abstract

We study the cosmology on one brane, in the frame the model of Randall-Sundrum, with help of the technique of maximum likelihood, we obtains parameters optimus for the model of braneworld, show the best fit for data of Supernovas type Ia, the confidence regions, and fuctions of likelihood for each one parameters.

1 Introducción

Recientemente la técnica de máxima verosimilitud [1] [2] [3], se viene aplicando con regularidad para contrastar y restringir los modelos teóricos desarrollados en la cosmología moderna. Es uno de los mejores métodos para obtener un estimador puntual de un parámetro o de un conjunto de parámetros, y como su nombre lo indica, el estimador será el valor o valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud. Esta técnica consiste en obtener una función de verosimilitud, sabiendo que los datos observacionales se distribuyen normalmente y donde se asume que las medidas observacionales se presentan con errores Gaussianos no correlacionados, y en tal caso se puede encontrar que la función de likelihood \mathcal{L} o de log-likelihood $\log \mathcal{L}$, puede ser determinada del estadístico χ^2 , donde $\mathcal{L} \propto e^{(-\frac{\chi^2}{2})}$.

2 Marco Teórico

Se describe el estadístico chi-cuadrado, el cual involucra los datos observacionales (magnitud y redshift de Supernovas Ia), al igual que los datos obtenidos teóricamente bajo consideración del modelo cosmológico de braneworld [4] [5] [6], como también la desviación estándar para cada una de las observaciones. Se puede demostrar que los parámetros que maximizan la función de verosimilitud, son los mismos que minimizan el chi-cuadrado, de tal forma que la función chi-cuadrado tiene la siguiente forma

$$\chi^2(z_i; \Omega_\alpha) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{m_{obs}(z_i) - m_{teo}(z_i; \Omega_\alpha)}{\sigma_m(z_i)} \right]^2. \quad (1)$$

La magnitud teórica se obtiene según el modelo braneworld

$$m_{teo}(z) = 5 \log \frac{(1+z)}{\sqrt[2]{\Omega_{k0}}} \text{sen}[\sqrt[2]{\Omega_{k0}}] + \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{GR0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz + \mathbf{M}, \quad (2)$$

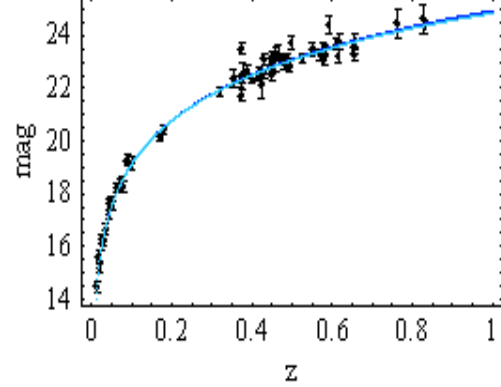
de tal forma que la función chi-cuadrado que se debe de estudiar se puede escribir completamente como

3 Mejor Ajuste y Regiones de Confianza

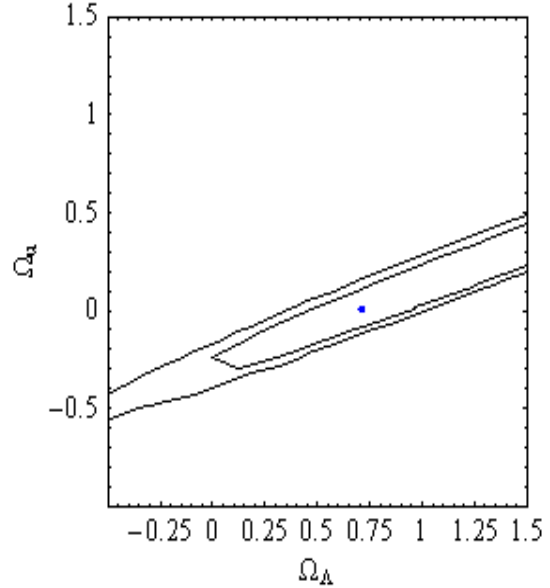
$$\chi^2(z_i; \Omega_{GR0}, \Omega_{\Lambda 0}, \Omega_{\lambda 0}, \Omega_{U0}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\sigma_m(z_i))^2} [m_{obs}(z_i) - 5 \log \frac{(1+z)}{\sqrt[2]{\Omega_{k0}}} \text{sen}[\sqrt[2]{\Omega_{k0}} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{GR0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz] + \mathbf{M}]^2. \quad (3)$$

Una manera de obtener información es encontrar los valores óptimos de los parámetros que minimizan la función anterior, lo cual se puede hacer numéricamente con la función *FindMinimum* de *Mathematica*, y para la realización del proceso de marginalización de los diferentes parámetros se construyen los contornos de nivel de esta función, basta considerar el valor mínimo más un valor apropiado obtenido de la distribución chi-cuadrado, esto implica que el 68% del valor aleatorio de los parámetros en un conjunto de datos dará χ^2 tal que $\chi^2 - \chi_{\min}^2 \leq \Delta\chi_{1\sigma(\nu)}^2$, donde $\Delta\chi_{1\sigma(\nu)}^2$ es por ejemplo 2.3 para dos parámetros libres ($\nu = 2$). Entonces, la anterior ecuación define la superficie 1σ alrededor de los parámetros de mejor ajuste. Similarmente, puede mostrarse que el 95.4% de los valores aleatorios en el conjunto dado dará un χ^2 tal que $\chi^2 - \chi_{\min}^2 \leq \Delta\chi_{2\sigma(\nu)}^2$, donde $\Delta\chi_{2\sigma(\nu)}^2$ es 6.17 por ejemplo para dos parámetros libres[7]. En el desarrollo de este trabajo se ha escrito un programa en *mathematica* V4.0, el cual permite obtener los parámetros óptimos del modelo, Ω_α , como el valor de chi-cuadrado y los respectivos contornos o regiones de confianza, asimismo, se ha hecho uso de los datos de Supernovas Ia, reportados por el Proyecto de Supernovas de Alto Corrimiento al Rojo, el cual esta conformado por un total de 60 SN Ia, las cuales han servido para demostrar la expansión acelerada del Universo.

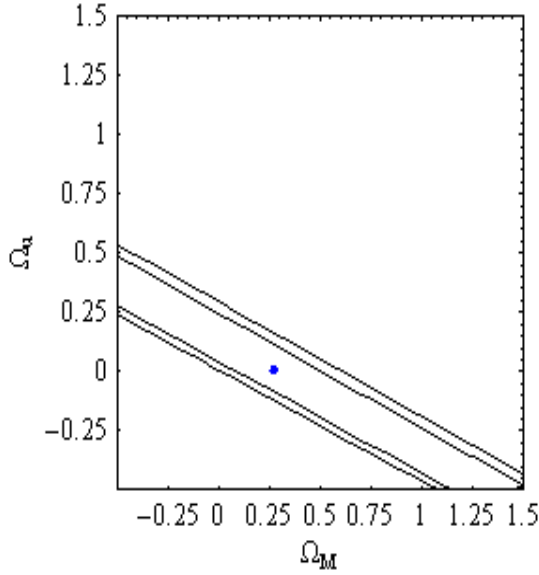
Reportamos, la curva de mejor ajuste para los datos mencionados, al igual que las regiones de confianza para algunas parejas de parámetros



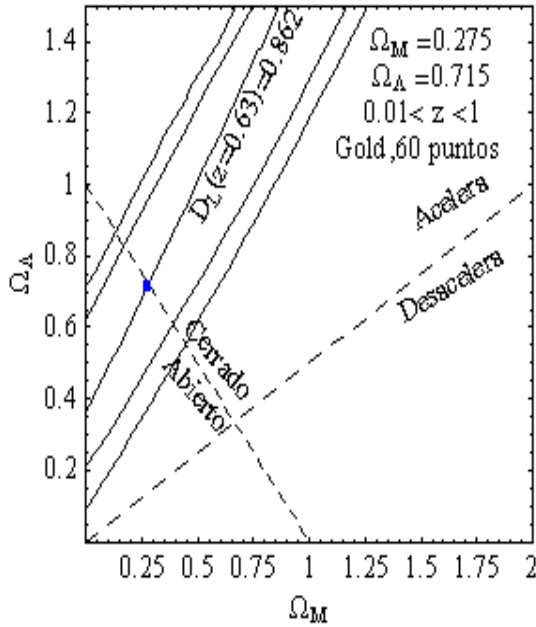
Curva de mejor ajuste.



Regiones de confianza del 68% y 95 %.



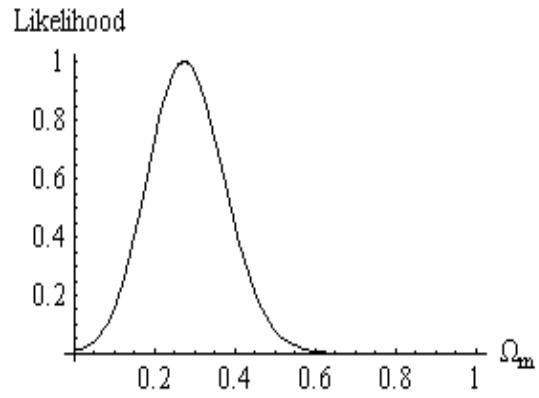
Regiones de confianza del 68% y 95%.



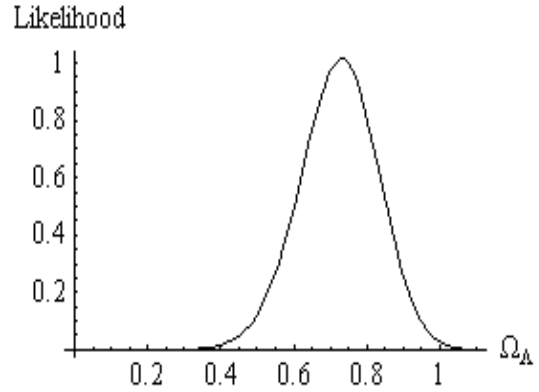
Regiones de confianza del 68% y 95%, para el plano estándar.

4 Funciones de Verosimilitud

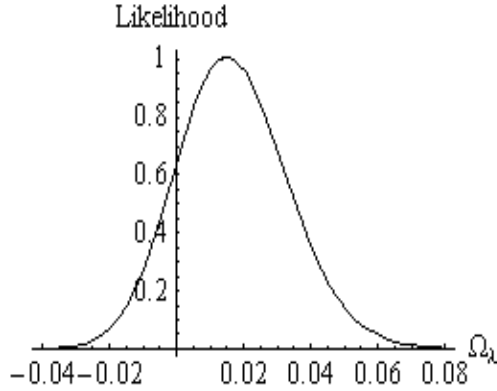
Se reportan, las funciones de verosimilitud para los cuatro parámetros relevantes del modelo braneworld, dichas funciones de verosimilitud se pueden interpretar como la función de distribución de valores las cuales permiten determinar la probabilidad de obtener algún valor para los parámetros en cuestión.



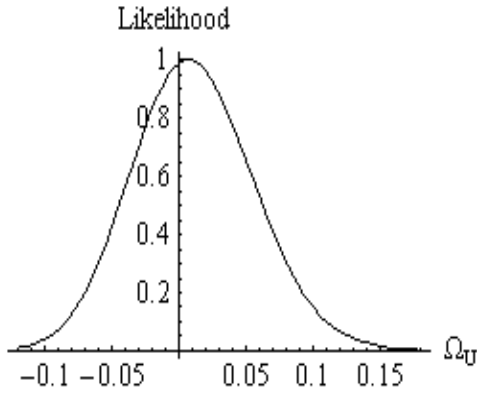
Función de verosimilitud o de distribución de valores, para el parámetro de densidad de materia.



Función de verosimilitud o de distribución de valores, para el parámetro de densidad de constante cosmológica.



Función de verosimilitud o de distribución de valores, para el parámetro de densidad de tensión sobre la brane.



Función de verosimilitud o de distribución de valores, para el parámetro de densidad de radiación oscura sobre la brane.

5 Conclusiones

Se determinó con ayuda de la técnica de máxima verosimilitud, la curva de mejor ajuste, las regiones de confianza y las funciones de verosimilitud. Se observa el valor más probable para cada parámetro, de igual forma en las regiones de confianza que se muestran, se aprecia los posibles valores para los parámetros del modelo. Puede decirse, además que la técnica de máxima verosimilitud desde el punto de vista estadístico, es una herramienta bastante valiosa para deter-

inar ajustes no lineales, para restringir modelos teóricos y para obtener la distribución de probabilidad de los parámetros involucrados en un modelo. Los resultados obtenidos en este trabajo concuerdan con los resultados reportados en la literatura, en particular los resultados para el plano estándar son compatibles con el modelo estándar de la cosmología.

References

- [1] T. Padmanabhan, T. Roy Choudhury, *Ganeshkhind, Pune, India*, astro-ph/0212573v2, 2003.
- [2] M. C. Bento, O. Bertolami, N. M. C. Santos, A. A. Sen, *Departamento de Física and Centro de Física Teórica de Partículas, Lisboa Portugal*, astro-ph/0412638v2, 2005.
- [3] Adam. G. Riess, Alexei V. Filippenko, *Department of Astronomy, University of California, Berkeley, CA*, astro-ph/9805201v1, 1998.
- [4] Martens, R., “Brane-World Gravity”, *Living Reviews in Relativity*, gr-qc/0101059
- [5] Randall, L., and Sundrum, R., “An Alternative to Compactification”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4690-4693, (1999)
- [6] Randall, L., and Sundrum, R., “Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3370-3373, (1999)
- [7] Herman. J. Mosquera, Habit Dumet, Cristina Furlaneto, *Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofisica (ICRA-BR)*, RJ Brazil, JCAP07(2008)004