

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método más difundido de cálculo de estructuras complejas es el MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM¹), su particularidad consiste en que una construcción que es un continuo, se cambia por un análogo, que está compuesto de pequeños cubos, de un número finito de bloques - ELEMENTOS, el comportamiento de los cuales es posible hallar a priori. La interacción entre elementos nos da la posibilidad de representar la cartina común del sistema deformado.

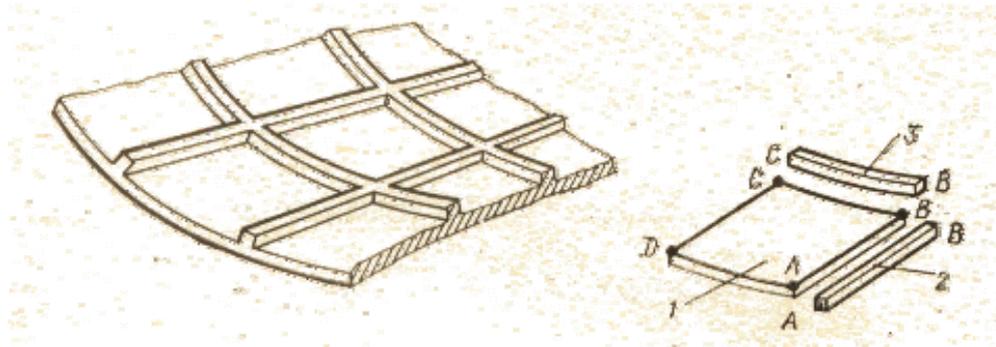


FIGURA 1

En la figura 1 se representa una estructura compuesta de un panel y refuerzos longitudinales y circulares

La construcción de la membrana puede ser formada de un conjunto de elementos simples; de membranas cilíndricas rectangulares 1, barra recta 2, barra curva 3. Las características de cada uno de estos elementos se determina a priori. En la figura se representa los puntos nodales A, B, C, D, por los cuales los elementos se unen en un sistema común. El estado tensional de tal construcción compleja puede ser determinado con ayuda de FEM

El método de los elementos finitos resuelve gran cantidad de problemas de resistencia, estabilidad y dinámica de las construcciones. El se usa para el análisis de fenómenos no lineales, con su ayuda se logra resolver problemas multidimensional complejos de optimización y otros.

La ventaja del método y su universalidad: las posibilidades de utilizar elementos de distintos tipos, seleccionar una región arbitraria, simplicidad en asumir la construcción de elementos de alta exactitud.

En la variante del método, que se desarrollara abajo – método de los desplazamientos, -durante la unión de los elementos las exigencias de logran de las condiciones de contorno naturales no es obligatorio.

Este muy conocido variante del MEF utiliza el principio de los desplazamientos virtuales

En forma matricial para un cuerpo de tres dimensiones se puede representar en la forma siguiente

¹ FINITE ELEMENT METHOD

$$\iiint \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dx dy dz = \iiint \{q\}^T \{\delta u\} dx dy dz + \iint \{p\}^T \{\delta u\} dS$$

Esta misma ecuación puede ser escrita de la siguiente manera

$$\iiint \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz = \iiint \{\delta u\}^T \{q\} dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS \quad (1)$$

Donde los vectores esfuerzo y deformación son iguales

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_x \tau_y \tau_z\}^T \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T \end{aligned}$$

Los vectores de fuerza volumétrica y superficial y el vector desplazamiento son los siguientes:

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{XYZ\}^T \\ \{p\} &= \{p_x p_y p_z\}^T \\ \{u\} &= \{uvw\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

La condición de equilibrio (1) no depende de la propiedad del material y se cumple tanto en los sistemas lineales y no lineales. Para cuerpos elástico- lineales, que tienen deformación inicial, la ecuación física toma la siguiente forma

$$\{\sigma\} = |D|\{\varepsilon\} - |D|\{\varepsilon_o\} \quad (4)$$

$|D|$ - Matriz de constantes de elasticidad

$\{\varepsilon_o\}$ - Vector de las deformaciones iniciales

El rol de las deformaciones iniciales juega, en particular la dilatación por temperatura

Remplazando la ecuación (4) en la ecuación (1)

$$\iiint \{\delta\varepsilon\}^T |D|\{\varepsilon\} dx dy dz = \iiint (\{\delta\varepsilon\}^T |D|\{\varepsilon_o\}) dx dy dz + \iiint \{\delta u\}^T \{q\} dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS \quad (5)$$

Esta condición se cumple tanto para un elemento separado, como para todo el sistema.

$$\sum_{i=1}^n \left[\{\delta\varepsilon\}^T |D|\{\varepsilon\} dx dy dz \right]_i = \sum_{i=1}^n \left[\iiint (\{\delta\varepsilon\}^T |D|\{\varepsilon_o\}) dx dy dz + \iiint \{\delta u\}^T \{q\} dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS \right]_i \quad (6)$$

Donde n es el número de elementos

El método de los elementos finitos utiliza distintos procedimientos de los métodos variacionales. En la variante del método que vemos, también en el método **RELEI- RITZA**, es necesario tener un campo de desplazamientos, pero no en toda la región, a solamente en los límites del elemento. Los desplazamientos se dan en forma de polinomio en grados de x, y, z

$$\{u\} = [A]\{\alpha\} \tag{7}$$

[A] - Matriz que depende de las coordenadas

{α} - Vector de coeficientes del polinomio de la función de desplazamiento

La cantidad de coeficientes depende de los coeficientes corresponde al número de grados de libertad de los elementos, y los coeficientes se relacionan con los desplazamientos nodales.

Si representamos los desplazamientos de los articulaciones (nodos) del elemento por {u}_n

$$\{u\} = [\Phi]\{u\}_n \tag{8}$$

Utilizando las dependencias entre la deformación y desplazamiento, reemplazando en la ecuación (8), obtenemos.

$$\{\epsilon\} = [B]\{u\}_n \tag{9}$$

Donde:

$$\{u\}_n = \{u \quad v \quad w\}^T \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\}_n - [D]\{\epsilon_o\} \tag{10}$$

Veamos la parte derecha e izquierda de la ecuación de equilibrio de (5). Después de reemplazar el vector deformación (6) en la parte izquierda de la ecuación (5) el será representado a través de los desplazamientos de los nodos y una integral que será representado por el símbolo [K]

$$\iiint \{\delta\epsilon\}^T [D]\{\epsilon\} dx dy dz = \delta\{u\}_n^T \iiint [B]^T [D][B] dx dy dz \{u\}_n = \delta\{u\}_n^T [K]\{u\}_n \tag{11}$$

Aquí la matriz [K], que contiene la principal información sobre el comportamiento del sistema deformado. El se llama matriz de rigidez del elemento y representa la principal característica del sistema en el FEM.

En la parte derecha de la ecuación (5) las integrales de volumen y de superficie se puede representar de la siguiente forma

$$\iiint (\{\delta\epsilon\}^T [D]\{\epsilon_o\} + \{\delta u\}^T \{q\}) dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS = \delta\{u\}_n^T \iiint [B]^T [D]\{\epsilon_o\} dx dy dz + \delta\{u\}_n^T \iiint [\Phi]^T \{q\} dx dy dz + \delta\{u\}_n^T \iint [\Phi]^T \{p\} dS \tag{12}$$

Con estas relaciones se determina el vector $\{F\}$ aplicado a los nodos de las fuerzas externas

De este modo, considerando conocido la matriz $[\Phi]$, que relaciona los desplazamientos en cualquier punto del elemento con los desplazamientos de los nodos (8) y la matriz $[B]$, que corresponde a las relaciones entre la deformación y desplazamiento de los nudos del elemento por la formula (9), determina la matriz de rigidez $[K]$ y el vector de la fuerzas externas en los nodos $\{F\}$

$$[K] = \iiint [B]^T [D][B] dx dy dz \tag{13}$$

$$\{F\} = \iiint [B]^T [D]\{\epsilon_o\} dx dy dz + \iiint [\Phi]^T \{q\} dx dy dz + \iint [\Phi]^T \{p\} dS \tag{14}$$

Para cada elemento la condición de equilibrio ahora toma forma

$$[K]\{u\}_n = \{F\} \tag{15}$$

Del mismo modo se llega a la relación para todo el sistema. Pero en lugar del vector de desplazamientos de los nodos $\{u\}_n$ y matriz de rigidez del elemento $[K]$ serán la matriz de desplazamientos de todo el sistema $\{\bar{u}\}_n$ y la matriz de rigidez se llama común o global de todo el sistema $[\bar{K}]$

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\}_n = \{\bar{F}\} \tag{16}$$

Esta ecuación representa el principal durante el cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos. El nos permite hallar los desplazamientos, y utilizando la ecuación (7) determinar el estado tensional en cada elemento. El principal problema en el calculo de estructura por el MEF esta en hallar la matriz de rigidez de los elementos, la matriz global de rigidez $[\bar{K}]$, y el vector de fuerzas en los nodos $\{\bar{F}\}$

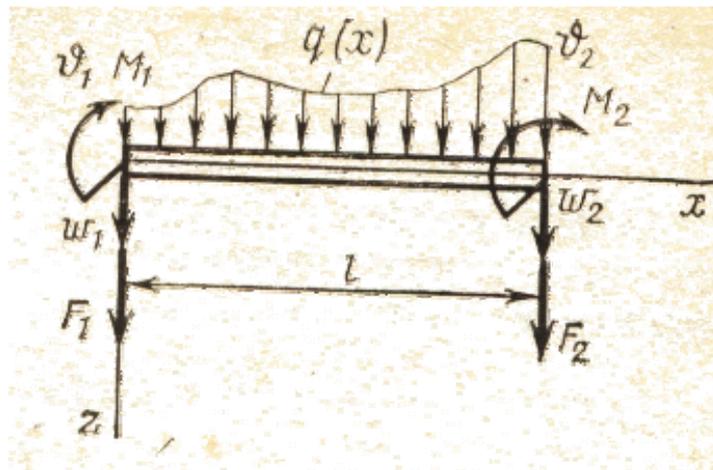


FIGURA 2

Ahora veamos en un ejemplo como determinar estas matrices y vectores. En la figura se representa un elemento viga, flexionado por una carga distribuida transversal $q(x)$

La posición del elemento se determina por el vector

$$\{u\}_n = \{w_1 \quad \vartheta \quad w_2 \quad \vartheta\}^T \quad (17)$$

Que esta compuesto por dos desplazamientos, y dos ángulos de giro

Suponemos, que el campo de desplazamientos en el elemento se escribe por un polinomio algebraico, que tiene cuatro coeficientes

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [A]\{\alpha\}$$

Considerando que la sección x gira un ángulo $\vartheta = \frac{dw}{dx}$, y también, que durante $x = 0$ tenemos

$w = w_1$; $\vartheta = \vartheta_1$ y cuando $x = 1$ tenemos $w = w_2$; $\vartheta = \vartheta_2$ encontramos el vector de los desplazamientos nodales

$$\{u\}_n = [C]\{\alpha\} \quad (18)$$

Donde

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & l & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}$$

El vector de coeficientes $\{\alpha\}$ con los desplazamientos nodales se relaciona con la matriz inversa $[C]^{-1}$

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{u\}_n$$

Reemplazando esta ecuación en la formula (17), obtenemos

$$w = [A][C]^{-1}\{u\}_n = [\Phi]\{u\}_n \quad (19)$$

De aquí se puede hallar la matriz $[\Phi]$. Para el problema tratado este será la matriz - fila

$$[\Phi] = \left[\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \right) \quad \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right)l \quad \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \right) \quad \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right)l \right] \quad (20)$$

El alargamiento relativo de la fibra, que se encuentra en una distancia z del eje neutral de la barra, se determina por la ecuación.

$$\varepsilon = -z \frac{d^2w}{dx^2}$$

Teniendo en consideración la ecuación (19), obtenemos

$$\varepsilon = -z \frac{d^2}{dx} [\Phi] \{u\}_n$$

Ahora hallemos la matriz $[B]$, para el cual necesitamos diferenciar dos veces cada componente de la ecuaciones (20) y el resultado multiplicar por $-z$

$$[B] = z \frac{d^2}{dx} [\Phi] = -z \left[\frac{1}{l} \left(-6 + 12 \frac{x}{l} \right) \quad \frac{1}{l} \left(-4 + 6 \frac{x}{l} \right) \quad \frac{1}{l^2} \left(6 - 12 \frac{x}{l} \right) \quad \frac{1}{l} \left(-2 + 6 \frac{x}{l} \right) \right]$$

Ahora con ayuda de la ecuación (16) se logra determinar la matriz de rigidez de los elementos de la barra, el modulo de elasticidad y el momento de inercia del cual en los límites del elemento no cambia.

$$[K] = EJ \int_0^l \begin{bmatrix} -\left(6 - 12 \frac{x}{l}\right) / l^2 \\ -\left(4 - 6 \frac{x}{l}\right) / l \\ \left(6 - 12 \frac{x}{l}\right) / l \\ -\left(2 - 6 \frac{x}{l}\right) / l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \left(6 - 12 \frac{x}{l}\right) & \frac{1}{l} \left(-4 + 6 \frac{x}{l}\right) & \frac{1}{l^2} \left(6 - 12 \frac{x}{l}\right) & -\frac{1}{l} \left(2 - 6 \frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} dx$$

Multiplicamos ambas matrices y realizamos la integración, obtenemos la expresión final para la matriz de rigidez del elemento barra.

$$[K] = -\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{sim} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

La matriz obtenida relaciona el vector de las fuerzas nodales, que esta compuesto de cuatro componentes (figura 2)

$$\{F\} = \{F_1 \quad M_1 \quad F_2 \quad M_2\}^T$$

Con el vector desplazamiento $\{u\}_n$, la matriz simétrica (21) es por la condición de trabajo de interacción de la teoría de la elasticidad

Determinamos el vector de las fuerzas nodales para la viga. Para el elemento sometido (figura 2) las fuerzas nodales se determinan con las ecuaciones (14). Para el problema tratado el tiene la forma

$$\{F\} = \int_0^l [\Phi]^T q(x) dx$$

O en su forma completa

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \int_0^l \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \\ \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)l \\ 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \\ \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)l \end{bmatrix} q(x)dx$$

La integración de cada elemento de la matriz en la última ecuación $q(x) = q$, que no cambian en los límites del elemento, permite hallar para el elemento del vector de las fuerzas nodales.

$$\{F\} = \left\{ \frac{ql}{2} \quad \frac{ql^2}{12} \quad \frac{ql}{2} \quad -\frac{ql^2}{12} \right\} \tag{22}$$

Estas fuerzas nodales se cambian por una carga distribuida, que actúan en la viga.

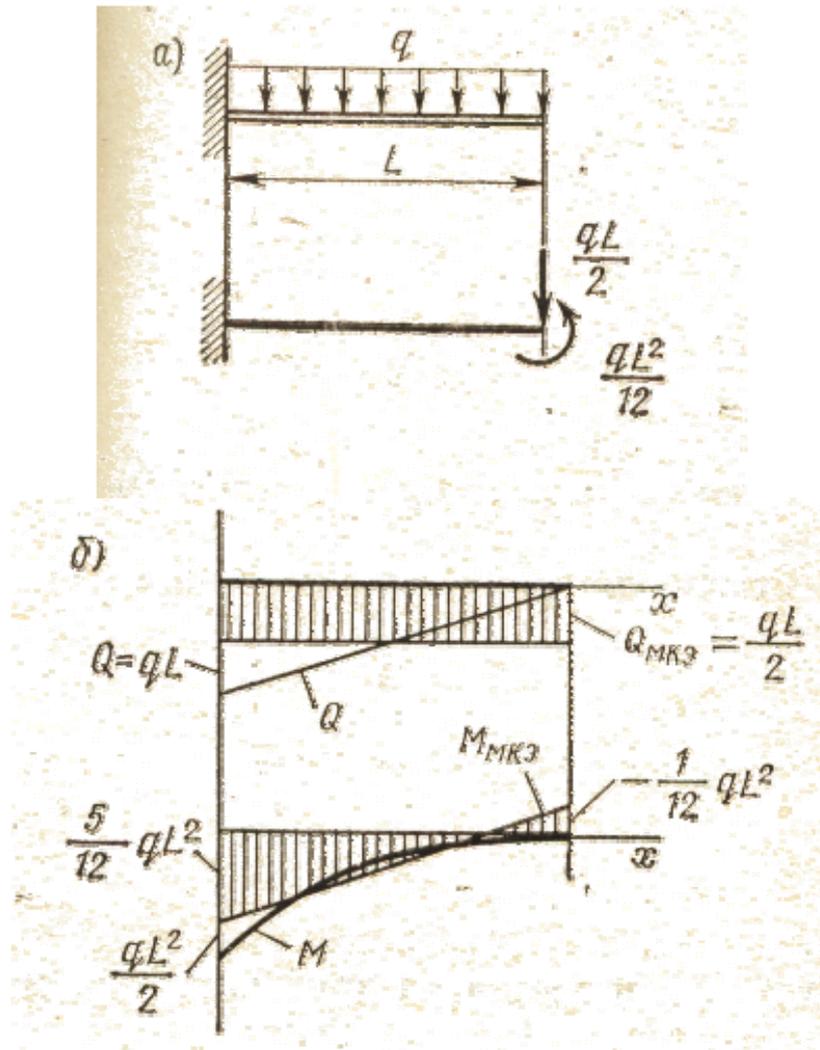


FIGURA 3

En el caso tratado, cuando el problema sobre la flexión transversal de la viga se resuelve con ayuda de FEM, y toda su longitud – con un elemento finito.

Para la viga en voladizo de longitud $L=1$, (figura 3) la carga q se cambia por $F_2 = \frac{ql}{2}$ y momento

$M_2 = -\frac{ql^2}{12}$. Para este sistema equivalente con las condiciones de empotramiento del extremo

izquierdo de los desplazamientos pueden ser determinadas de las ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} F \\ M \\ ql/2 \\ -ql/12 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \\ \vartheta \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos y el ángulo de giro del extremo de la barra será igual

$$w_2 = \frac{ql^4}{8EJ}$$

$$\vartheta_2 = \frac{ql^3}{6EJ}$$

Expresiones exactas para los desplazamientos y el ángulo de giro de cualquier punto tiene la forma

$$w = \frac{ql^4}{24EJ} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4 \frac{x^3}{l^3} + 6 \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$\vartheta = \frac{ql^3}{6EJ} \left(\frac{x^3}{l^3} - 3 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x}{l} \right)$$

Para el nodo del punto $x = l$ los desplazamientos y el ángulo de giro, que se determinan por el método de los elementos finitos, dan valores exactos.

En la figura 3 b, se muestran los valores exactos y aproximados del FEM (con líneas verticales delgadas) el diagrama de los momentos flectores $M(x)$ y las fuerzas cortantes $Q(x)$ para la viga . de los gráficos se ve , que ellos se diferencian sustancialmente cuando encontramos la solución solamente par un elemento .

Cuando discretizamos la viga en muchos elementos la diferencia en el diagrama claramente deberá ser menor.

Veamos la misma viga, pero compuesto de dos elementos (figura 4). La longitud de cada elemento $l=L/2$, el vector común de desplazamiento y el vector de fuerza tiene la forma

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \end{Bmatrix} = \{w_1 \quad \vartheta_1 \quad w_2 \quad \vartheta_2 \quad w_3 \quad \vartheta_3\}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{F} \end{Bmatrix} = \{F_1 \quad M_1 \quad F_2 \quad M_2 \quad F_3 \quad M_3\}^T$$

los componentes del vector $\{F\}$, es igual.

$$F_2 = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{2}$$

$$M_2 = -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql^2}{12} = 0$$

$$F_3 = \frac{ql}{2}$$

$$M_3 = -\frac{ql^2}{12}$$

Formamos la matriz de rigidez de todo el sistema.

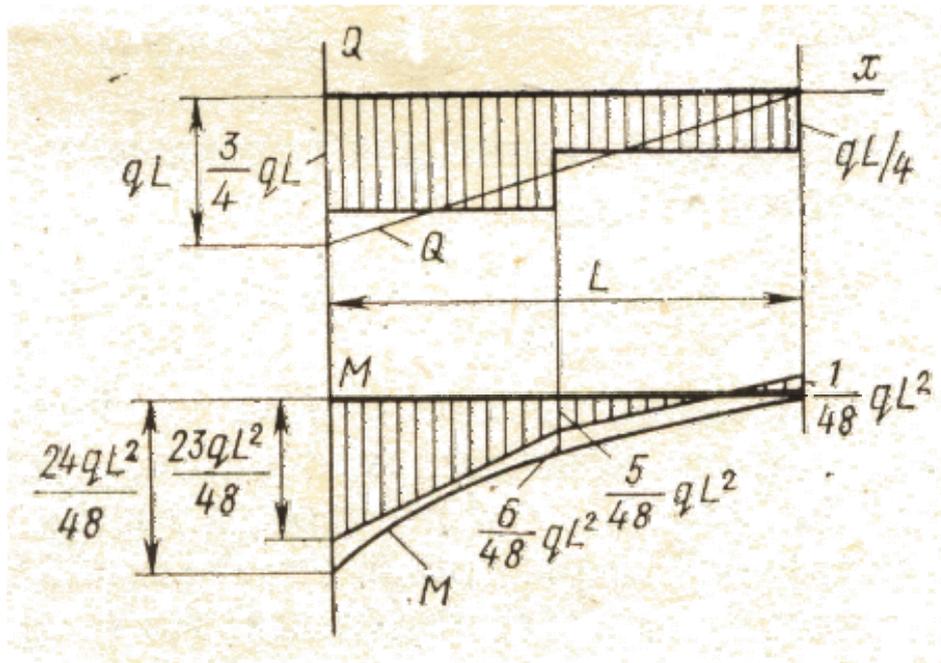


FIGURA 5

Existen muchas variantes del método de los elementos finitos. el que tratamos es el mas difundido , es raro que se utilice el procedimiento de garlekin . El es particularmente efectivo durante el cálculo donde es difícil escribir ecuaciones para la energía potencial completa.

Veamos las particularidades de utilización del método en el ejemplo de la flexión transversal de la viga. La ecuación diferencial de la ecuación de flexión de la viga de rigidez constante tiene la forma constante, tiene la forma

$$w^{VI} - \frac{q(x)}{EJ} = 0$$

En el tratado vectorial, el vector de los desplazamiento nodales , debe tener grado ocho , por cuanto en cada extremo del elemento en calidad de grados de libertad es necesario considerar no solamente los desplazamientos y ángulos de giro si no además los momentos flectores y fuerzas cortantes . y como el ángulo de giro corresponde a la primera derivada w' del desplazamiento , y el momento y la fuerza cortante es proporcional a la segunda y tercera derivada , el vector $\{u\}_n$ representamos en la forma.

$$\{u\}_n = \{w_1 \quad w_1' \quad w_1'' \quad w_1''' \quad w_2 \quad w_2' \quad w_2'' \quad w_2'''\}^T$$

Entonces los desplazamientos en los limites del elemento se representan por el polinomio de grado siete

$$w = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad x^6 \quad x^7] \{\alpha\} = [A] \{\alpha\}$$

Donde el vector de coeficientes

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8\}^T$$

Cuando $x = 0$ y $x = l$ el desplazamiento w y las derivadas de el son iguales a las componentes nodales del vector $\{u\}_n$

$$\begin{aligned} x = 0 & ; w = w_1 ; w' = w_1' ; w'' = w_1'' ; w''' = w_1''' \\ x = l & ; w = w_2 ; w' = w_2' ; w'' = w_2'' ; w''' = w_2''' \end{aligned}$$

De aquí se forma la relación entre el vector de los desplazamientos nodales y vector de coeficientes

$$\{u\}_n = [C]\{\alpha\}$$

donde [C]

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & l^2 & l^3 & l^4 & l^5 & l^6 & l^7 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 & 4l^3 & 5l^4 & 6l^5 & 7l^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6l & 12l^2 & 20l^3 & 30l^4 & 42l^5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24l & 60l^2 & 120l^3 & 210l^4 \end{bmatrix}$$

El desplazamiento de cualquier punto del elemento, expresado a través del desplazamiento y sus derivadas en los nodos, ahora tendrá la forma.

$$w = [A][C]^{-1}\{u\}_n = [\Phi]\{u\}_n$$

Reemplazando estas ecuaciones en la ecuación de equilibrio y teniendo en cuenta que la función potencial seleccionada en el caso general no representa su solución, obtenemos la función de error.

$$R_n = [\Phi]^{IV}\{u\}_n - \frac{q(x)}{EJ}$$

De acuerdo al método de garlekin la función error debe sujetarse a la ecuaciónEn la variante FEM el corresponde a la siguiente dependencia.

$$\frac{\partial}{\partial \{u\}_n} \int [\Phi]\{u\}_n R_n dx = 0$$

De aquí se puede construir la matriz de rigidez y el vector de las fuerzas externas del elemento.

El método de garlekin en la formulación del elemento finito, da buenos resultado para las fuerzas y desplazamientos aun cuando tenemos pocos elementos, en la cual se divide el sistema deformado . Por eso el aparente tedioso de los cálculos con relación con el método, que se basa en el principio de desplazamientos virtuales, puede ser compensado por su gran exactitud, en particular para determinar las fuerzas internas.

El tratado ejemplo de utilización del FEM, tiene ante todo sentido metodológico. Las posibilidades prácticas del método es muy amplio. El se utiliza para resolver gran cantidad de problemas complejos. Pero los principios principales del método, y su secuencia de cálculo, pueden ser asimilados en los ejemplos simples tratados.