Universidad de La Habana
Facultad de Matemática y Computación
Departamento de Matemática

EL ÁLGEBRA DE LAS FUNCIONES DE p-VARIACIÓN ACOTADA

Tesis presentada en opción al grado de
Licenciado en Matemática

Autor: Rolby Milian Pérez
Tutor: Dra. Rita Roldán Inguanzo

Ciudad de La Habana
2008

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia el problema de la dualidad del espacio de las funciones de p-variación acotada ($V_p, \quad p > 1$), definidas sobre $\mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{C}$, considerando su estructura de álgebra de Banach conmutativa y unitaria. Se prueba que V_p es un álgebra semisimple y se obtiene un teorema de representación que conduce a la exposición de algunos resultados sobre el espacio de ideales.

ABSTRACT

In this paper it had studied the problem of the duality of the space of functions of p-bounded variation ($V_p, \quad p > 1$), with domain $\mathbb{R}$ and values in $\mathbb{C}$. It had considered the structure of conmutative Banach Algebra with unitary element. Here will be proved that it‘s a semisimple algebra and be presented a representation theorem that conduce to the explanation of some ones results about the ideals space.

INTRODUCCIÓN

En la Enciclopedia de la Matemática (ver [12]), se declara al Análisis Funcional como la parte del Análisis Matemático moderno, cuyo objetivo principal es el estudio de las funciones $y = f(x)$, cuyas variables (o al menos una de ellas) varían en un espacio de dimensión infinita. Tal estudio se divide en tres partes:

(i) Determinación y estudio de los espacios infinitos.

(ii) Estudio de las funcionales.

(iii) Estudio de los operadores.

De esta manera, para describir de manera compacta la historia del Análisis Funcional, conviene enfatizar en la evolución de dos conceptos: teoría espectral y dualidad. Respondiendo a los intereses de este estudio, se describe a continuación de modo breve el desarrollo del concepto de dualidad.

El problema de la dualidad de espacios de funciones data de los orígenes del problema de momentos en la Teoría de las Probabilidades. La relación de este problema con la Teoría de las Probabilidades fue señalada por el matemático ruso Tschebycheff (1821-1894), quien comenzó sus estudios en este sentido alrededor del año 1855. Tschebycheff consideró las integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^n dx, \qquad (n = 1, 2...),$$

donde f es una función no negativa. Estos son los momentos de la distribución en $(-\infty, +\infty)$ de la función de densidad f. Nótese que aún no se definen los momentos en términos de una integral de Stieltjes. Este tipo de integrales fueron introducidas por Stieltjes (1856-1894) en 1894, cuando trabajaba con fracciones continuas. Para este momento Tschebycheff había resuelto el problema, considerando integrales en la forma anterior para $x \in [0, 1]$. Sin embargo, es con los trabajos de Hadamard (1865-1963) y de Riesz (1880-1956), donde se evidencia que el problema de momentos puede ser formulado como el problema de la existencia, en un espacio lineal, de una funcional lineal, que toma determinados valores para una sucesión dada de elementos del espacio. Tomando estos elementos como $f_n(x) = x^n$, se obtiene el problema de momentos. Una generalización de este problema conduce a la teoría de dualidad en espacios de Banach.

Respecto a la representación de funcionales lineales continuos, se puede mencionar a Hadamard (ver [17]), quien ataca el problema de representar los funcionales lineales y continuos sobre $C[a,b]$ (para él la continuidad de un funcional U significa que $U(f_n)$ tiende a $U(f)$ cuando f_n tiende a f uniformemente). Hadamard selecciona una función fija F tal que si para todo $f \in C[a,b]$ se tiene

$$f(x) = \lim_n \int_a^b f(t)F(n(t-x))dt$$

uniformemente en x, entonces

$$U(f) = \lim_n \int_a^b f(t)\Phi_n(t)dt,$$

donde $\Phi_n(t) = U[nF(n(t-x))]$. De esta manera, la elección de F es arbitraria.

En 1904, Frechet (1878-1973) presenta una nueva demostración del teorema de Hadamard y comienza a investigar problemas similares sustituyendo a $C[a,b]$ por otros espacios de funciones. Tan pronto como comenzó el estudio del espacio de Hilbert, Frechet y Riesz independientemente demuestran que para toda funcional lineal f continua sobre l^2 existe un único elemento $x_0 \in l^2$ tal que $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ para toda $x \in l^2$. Tal resultado se conoce como Teorema de Riesz-Frechet o Teorema de Representación de Riesz (ver, por ejemplo, [7]).

En 1909, Riesz obtiene el Teorema de representación de funcionales definidas y continuas sobre $C[a,b]$ con la topología de la convergencia uniforme, logrando así una mejora considerable del Teorema de Hadamard, al liberarse de la arbitrariedad de la sucesión Φ_n. Ello se logra a través de las integrales de Stieltjes. Riesz demuestra (ver, por ejemplo, [9]) que toda funcional lineal continua $U : C[a,b] \to \mathbb{R}$ puede ser escrita de modo único como

$$U(f) = \int_a^b f(x)d\alpha(x),$$

donde $\alpha(x)$ es una función de variación acotada en $[a,b]$. Para él, una función de variación acotada es la diferencia de dos funciones monótonas no decrecientes. De esta forma se puede identificar al espacio dual de $C[a,b]$ con el espacio de las funciones de variación acotada. Este teorema significó un gran avance en las ideas de dualidad, ya que como las funciones de variación acotada pueden ser discontinuas sólo en un conjunto numerable de puntos, resulta imposible identificar a las funcionales lineales continuas sobre $C[a,b]$ con los elementos de $C[a,b]$, en contraste con lo que sucedía con l^2 de acuerdo al teorema de Riesz-Frechet. Por otra parte, se conoce que para el espacio L^2 es posible, debido al Teorema de Riesz-Fischer (ver, por ejemplo, [9]), identificar a sus elementos con sucesiones numéricas. Sin embargo, tal identificación no es posible en el caso del espacio $C[a, b]$, por lo que se tiene que trabajar directamente con estos elementos y no con sus coordenadas.

En su tesis de 1935, Izrail Moiseevich Gelfand (1913-) extiende la definición de función de variación acotada a la de función abstracta de variación acotada (ver [4]). Entre otros resultados, generaliza el teorema de representación de Riesz, demostrando que el espacio de los operadores lineales y continuos

$$U : C[a, b] \to E,$$

donde E es un espacio normado débilmente completo, es isomorfo al espacio de las funciones abstractas de variación acotada.

El concepto de p-continuidad absoluta de una función real definida sobre el intervalo $[a, b]$ para $1 < p < \infty$ aparece por primera vez en el año 1937, en los trabajos de E.R. Love y L.C. Young (ver [11]), quienes desarrollaron también la noción de función de p-variación acotada sobre el intervalo $[a, b]$. En esta línea se destacan también los polacos Musielak y Orlicz (ver [13]), quienes en el año 1959 demostraron en conjunto la separabilidad del espacio $C_p[a, b]$ de las funciones absolutamente p-continuas en $[a, b]$.

En 1984 aparece un trabajo del matemático ruso V.Kisliakov (ver [8]), donde se demuestra de forma indirecta que el espacio bidual a $Cp[a, b]$ de las funciones absolutamente p-continuas en [a,b] es isomorfo al espacio $Vp[a, b]$ de las funciones de p-variación acotada en $[a, b]$. De esta forma, la búsqueda de una demostración directa de la relación $C^{**}[a, b] \simeq V_p[a, b]$ se convierte en la piedra angular del desarrollo de la tesis de doctorado (ver [16]) de la cubana Rita A. Roldán durante su estancia en Alemania (Jena) en 1989. Entre otros resultados, en la búsqueda de un isomorfismo isométrico entre los espacios $C_p[a, b]$ y $V_q[a, b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ en analogía con el caso clásico para $q = 1$ y $p = 1$, ya que $C_\infty[a, b] = C[a, b]$, se da una representación de las funcionales lineales y continuas sobre $C_p[a, b]$ a través de integrales de Stieltjes respecto a funciones de q-variación acotada en [a,b]. Se hace notar que $V_q[a, b]$ no puede ser el espacio dual de $C_p[a, b]$, mostrándose, no obstante, una condición suficiente para la existencia de la integral de Stieltjes de forma tal que esta representa un funcional continuo. De la misma forma se tratan propiedades importantes de los espacios $V_p[a, b]$ y $C_p[a, b]$ como, por ejemplo, la relación de estos con el espacio $Lip_\alpha[a, b]$ de las funciones α-lipchitzianas $(0 < \alpha < 1)$, al igual que la no separabilidad de $V_p[a, b]$ y la separabilidad de $C_p[a, b]$.

A partir de este momento, en la literatura a disposición del autor de esta tesis, sólo se encuentran referencias a estos espacios en relación con otro tipo de problemas (por ejemplo, probabilísticos), y no se tiene noticia de que se haya continuado el estudio de la representación del espacio dual de $C_p[a, b]$ o de $V_p[a, b]$ hasta el año 2005, donde Y. Puig de Dios retoma el tema. En su tesis de licenciatura (ver [15]), Puig define los espacios de funciones abstractas de p-variación acotada y absolutamente p-continuas fuerte y débil, generalizando el problema y presentando algunos resultados importantes en esta dirección.

Motivados por todo lo anterior y atendiendo a la belleza y utilidad de la Teoría de Gelfand de las Álgebras de Banach en el Análisis Funcional, en el presente trabajo se aborda el problema de la dualidad del espacio $V_p = V_p(\mathbb{R})$ de las funciones complejas de p-variación acotada definidas sobre el campo de los números reales, teniendo en cuenta su estructura de álgebra de Banach, obteniendo un teorema de representación y algunos resultados de importancia sobre el espacio de ideales maximales de V_p.

La tesis se estructura en una introducción y tres capítulos, cerrando la presentación con las conclusiones y recomendaciones del autor.

En el primer capítulo ("Premilinares") se exponen los resultados básicos de la Teoría de las Álgebras de Banach y de los espacios de funciones de p-variación acotada y absolutamente p-continuas, que serán de utilidad posteriormente.

El objetivo central del segundo capítulo ("Un teorema de representación"), como su título indica, es la obtención de un teorema de representación para el espacio dual de V_p. Para ello, en un primer epígrafe se definen los espacios V_p y C_p, enunciando algunas propiedades interesantes de ellos. Además se demuestra que V_p es un álgebra de Banach conmutativa unitaria y semisimple, lo cual permite concluir en el segundo epígrafe con la demostración del teorema de representación que da título al capítulo. En dicho teorema se representa a los funcionales continuos sobre V_p a través de su espacio de ideales maximales, del cual no se tiene una caracterización adecuada, lo que conduce a la necesidad de su estudio.

A partir de ello, en el tercer capítulo ("Acerca de los ideales de V_p") se presentan algunos resultados en relación con la estructura del espacio de ideales de V_p, los cuales contribuyen en la búsqueda de una caracterización de dicho espacio.

Finalmente se presentan las "Conclusiones y recomendaciones", donde se resumen los resultados fundamentales del trabajo, indicando posibles vías de desarrollo para el trabajo futuro.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo se exponen los resultados que constituyen la base para el posterior desarrollo del trabajo.

1.1. Álgebras de Banach conmutativas

Las definiciones y resultados de este epígrafe se pueden consultar (siempre que no se indique otra cosa) en [3].

Definición 1.1
Un álgebra de Banach es un espacio de Banach complejo A, el cual es también un álgebra asociativa, donde la multiplicación y la norma estan ligadas por la relación

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|, \qquad \textit{para todas } f, g \in A$$

El álgebra de Banach A es conmutativa si se cumple $fg = gf$ para todas $f, g \in A$.
Se dice que el álgebra de Banach A tiene una identidad si existe en ella un elemento $1 \in A$, tal que $\|1\| = 1$ y $1f = f1$ para toda $f \in A$.

En esta tesis se centrará el interés en las álgebras de Banach conmutativas con identidad.

Espectro y resolvente

La teoría espectral de operadores acotados encuentra su homólogo en los resultados sobre las álgebras de Banach que se exponen a continuación.

Definición 1.2

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

Se dice que un elemento $f \in A$ es inversible si existe un elemento $g \in A$ tal que $fg = 1$. En ese caso, el inverso g de f es evidentemente único, y se denota por f^{-1}.

La familia de los elementos inversibles de A se denota por A^{-1}.

Se dice que un número complejo λ es elemento del conjunto resolvente de $f \in A$ si $\lambda - f = \lambda 1 - f$ es inversible. El conjunto resolvente de f se denota por $\rho(f)$.

Si el número complejo λ no pertenece al conjunto resolvente, se dice que λ es elemento del espectro de f, el cual se denota por $\sigma(f)$.

Para el espectro de un elemento de un álgebra de Banach conmutativa con identidad se cumple:

Teorema 1.1

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $f \in A$. Entonces el espectro $\sigma(f)$ es un subconjunto compacto no vacío del plano complejo. Además, si $\lambda \in \sigma(f)$, la función $(\lambda - f)^{-1}$ depende analíticamente de λ; es decir, $(\lambda - f)^{-1}$ es localmente expresable como serie de potencias convergente.

Demostración:
Si $|\lambda| > \|f\|$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n}{\lambda^{n+1}}$$

converge a la función $g(\lambda)$, la cual es analítica en el infinito. Un cálculo directo muestra que $g(\lambda)(\lambda - f) = 1$; es decir, $g(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$. Luego, $\sigma(f)$ está contenido en el disco cerrado de radio $\|f\|$.

Por otra parte, si $\lambda_0 \in \rho(f)$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 - \lambda)^n}{(\lambda_0 - f)^{n+1}}$$

converge a la función $h(\lambda)$, la cual es analítica en el disco

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - f)^{-1}\|} \right\}.$$

Nuevamente un cálculo directo muestra que $h(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$. Consecuentemente el conjunto resolvente de f es abierto y $(\lambda - f)^{-1}$ es analítica en él.

Ahora, para cualquier funcional lineal continuo L definido sobre A, se tiene que $L((\lambda - f)^{-1})$ es una función de λ, analítica sobre el conjunto resolvente de f, que se anula en ∞. Si el espectro $\sigma(f)$ fuera vacío, entonces la función $L((\lambda - f)^{-1})$ sería identicamente nula. Por el teorema de Hahn-Banach (ver, por ejemplo [9]) $(\lambda - f)^{-1}$ sería también cero, lo cual es imposible. Entonces $\sigma(f)$ no es vacío, quedando así demostrado el teorema.

Q.e.d.

En el curso de la demostración anterior se han establecido los siguientes resultados:

TEOREMA 1.2
Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $f \in A$. Si λ es un elemento del espectro $\sigma(f)$, entonces se cumple que $|\lambda| \leq \|f\|$.

TEOREMA 1.3
Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $f \in A$. Si λ es un elemento del conjunto resolvente $\rho(f)$ y $d(\lambda, \sigma(f))$ es la distancia de λ a $\sigma(f)$, entonces

$$d(\lambda, \sigma(f)) \geq \frac{1}{\|(\lambda - f)^{-1}\|}.$$

El siguiente teorema es crucial en la teoría.

TEOREMA 1.4 *(Gelfand-Mazur)*
Un álgebra de Banach conmutativa y unitaria, que es un campo, es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos.

Demostración:
Toda álgebra de Banach con identidad A contiene una subálgebra isométricamente isomorfa al campo de los números complejos, (el álgebra de los múltiplos complejos de la identidad). Esto es suficiente para mostrar que si A es un campo, entonces cualquier $f \in A$ es un múltiplo complejo de la identidad.

Sea $f \in A$. Por el teorema 1.1, existe un número complejo λ, tal que $\lambda - f$ no es inversible. Como A es un campo, entonces debe ser $\lambda - f = 0$; es decir, $f = \lambda$, lo cual demuestra el teorema. **Q.e.d.**

El espacio de ideales maximales

De suma importancia por su estructura algebraica resulta el estudio de los ideales de un álgebra de Banach. A continuación se presentan algunos detalles importantes relativos a estos subconjuntos.

Definición 1.3

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

Un subconjunto $I \subset A$ es un ideal si para todos $f \in I$ y $g \in A$ se cumple que $fg \in I$.

Un ideal J de A se dice maximal si $J \neq A$ y J no está contenido en otro ideal de A. El conjunto de los ideales maximales de A es llamado espacio de ideales maximales de A y se denota por M_A.

Más adelante se introducirá una topología para el espacio de ideales maximales M_A.

El siguiente lema es elemental y es válido en general para anillos conmutativos con identidad.

Lema 1.1.1

Cualquier ideal propio de un álgebra de Banach A conmutativa con identidad está contenido en un ideal maximal. Un ideal J es maximal si y solo si A/J es un campo.

Teorema 1.5

Todo ideal maximal de un álgebra de Banach conmutativa con identidad A es cerrado. Si J es un ideal maximal de A entonces A/J es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos.

Demostración:
Nótese que cualquier función de A que cumpla $\|1-f\| < 1$ es inversible. En efecto si $\|1-f\| < 1$, entonces 1 es elemento del conjunto resolvente de $1-f$ por el teorema 1.2 y se cumple que $f = 1-(1-f) \in A^{-1}$.

Si I es cualquier ideal propio y $f \in I$, entonces $f \notin A^{-1}$, por lo que $\|1-f\| \geq 1$. Esta misma desigualdad es también válida para f en la clausura $\bar{I}$ de I. Luego, la clausura de todo ideal propio es un ideal propio, y todos los ideales maximales deben ser cerrados.

Sea ahora J un ideal maximal de A. Como J es cerrado, A/J es un espacio de Banach con la norma

$$\|f+J\| = \inf_{g\in J} \|f+g\|.$$

Resulta sencillo comprobar que para $f, g \in A$ se cumple

$$\|fg+J\| \leq \|f+J\|\|g+J\|,$$

siendo entonces A/J un álgebra de Banach. Como $\|g+1\| \geq 1$ para todo $g \in A$, se cumple que $\|1+J\| = 1$. Consecuentemente $1+J$ es la identidad para A/J.

Por el teorema de Gelfand-Mazur, A/J es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos. Esto completa la demostración. **Q.e.d.**

Sea J un ideal maximal del álgebra de Banach conmutativa con identidad A. La proyección de $A \to A/J$ es un homomorfismo de álgebras, de núcleo J. El teorema de Gelfand-Mazur permite identificar a A/J con el campo complejo. De esta manera J resulta el núcleo de un homomorfismo complejo no nulo ϕ.

Si $f \in A$, entonces se puede definir a $\phi(f)$ explícitamente como el único número complejo λ, tal que $f + J = \lambda + J$; es decir, tal que $f - \lambda \in J$.

Recíprocamente, si ϕ es un homomorfismo complejo no nulo de A y A_ϕ es el núcleo de ϕ, entonces A/A_ϕ es un campo, por lo que A_ϕ es un ideal maximal en A. Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1.6
: *Sean A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y ϕ un homomorfismo complejo no nulo de A de núcleo A_ϕ. Entonces la correspondencia $\phi \mapsto A_\phi$ es una correpondencia biyectiva del espacio de los homomorfismos complejos no nulos sobre A en el espacio de ideales maximales de A.*

En lo adelante se identificarán todos los ideales maximales de A con homomorfismos complejos, como es la costumbre.

El siguiente lema permitirá definir una topología para el espacio de ideales maximales M_A de A. Nótese que la afirmación relativa a la continuidad de ϕ se deduce del teorema 1.5, ya que que los funcionales lineales son continuos si y sólo si su núcleo es cerrado.

Lema 1.1.2
: *Sean A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y ϕ un homomorfismo complejo no nulo de A. Entonces ϕ es continuo y se cumple que*

$$\|\phi\| = 1 = \phi(1).$$

Demostración:
Como $\phi^2(1) = \phi(1)$, entonces es $\phi(1) = 1$ ó $\phi(1) = 0$. El último caso queda excluido, pues en caso contrario ϕ sería idénticamente nulo. De aquí que $\phi(1) = 1$.

Si $f \in A$ y $|\lambda| > \|f\|$, entonces $\lambda - f$ es inversible. De la relación

$$\phi(\lambda - f)\phi((\lambda - f)^{-1}) = \phi(1) = 1$$

se deduce que $\phi(\lambda - f) \neq 0$, o sea, $\phi(f) \neq \lambda$. Entonces es $|\phi(f)| \leq \|f\|$. Como ello es cierto para todo $f \in A$, ϕ debe ser continuo y $\|\phi\| \leq 1$. Pero como $\phi(1) = 1$, entonces es $\|\phi\| = 1$. **Q.e.d.**

El lema anterior permite identificar a M_A con un subconjunto de la esfera unitaria del dual A^* de A y se define en M_A la topología heredada de A_*. En otras palabras, una red ϕ_α en M_A converge a ϕ si y sólo si $\phi_\alpha(f) \to \phi(f)$ para todo $f \in A$. Una base de vecindades abiertas de $\psi \in M_A$ está dada por conjuntos de la forma

$$N(\psi; f_1, ..., f_n; \varepsilon) = \{\phi \in M_A; \quad |\phi(f_i) - \psi(f_j)| < \varepsilon\},$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, ..., f_n \in A$.

Teorema 1.7

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Entonces el espacio de ideales maximales M_A de A es un espacio de Hausdorff compacto.

Demostración:
El límite *- débil de homomorfismos que satisfacen $\phi(1) = 1$ es nuevamente un homomorfismo no nulo. Por lo tanto M_A es un subconjunto cerrado en la topología *-débil de la bola unidad de A^*. Por el teorema de Alaoglu (ver [9]), la bola unidad de A^* es *-débil compacta. Consecuentemente M_A es compacto. **Q.e.d.**

Definición 1.4

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $f \in A$. La transformada de Gelfand de $f \in A$ es la función compleja $\widehat{f}$ sobre M_A, definida por $\widehat{f}(\phi) = \phi(f)$.

Teorema 1.8

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Entonces la transformada de Gelfand es un homomorfismo de A en el álgebra $\widehat{A}$ de las funciones continuas sobre M_A. El álgebra $\widehat{A}$ separa puntos en M_A y contiene a las constantes. La transformada de Gelfand satisface la relación

$$\|\widehat{f}\|_{M_A} \leq \|f\|; \qquad \forall f \in A.$$

Demostración:
Resulta sencillo verificar que $f \mapsto \widehat{f}$ es un homomorfismo de álgebras. Por la definición de la topología dada para M_A, es claro que $\hat{f} \in \hat{A}$ es continuo en M_A. Al ser $\|\phi\| = 1$ para todo $\phi \in M_A$, se tiene que $|\widehat{f}(\phi)| \leq \|f\|$ para todo $f \in A$, por lo que $\|\widehat{f}\|_{M_A} \leq \|f\|$.

La transformada de Gelfand de la identidad de A es la función que es idénticamente uno en M_A. De aquí que $\widehat{A}$ contiene a las constantes.

Si $\widehat{f}(\phi_1) = \widehat{f}(\phi_2)$ para todo $f \in A$, entonces $\phi_1(f) = \phi_2(f)$ para todo $f \in A$ y $\phi_1 = \phi_2$. Entonces $\hat{A}$ separa los puntos de M_A. **Q.e.d.**

TEOREMA 1.9
Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Si $f \in A$, entonces $\sigma(f)$ coincide con $\widehat{f}(M_A)$.

Demostración:
Sea $\lambda \in \sigma(f)$. Entonces $\lambda - f$ no es inversible y $(\lambda - f)A$ es un ideal propio. Por el lema 1.1.1, existe un un ideal maximal J que contiene a $\lambda - f$. Si J es el núcleo de ϕ, entonces $\phi(\lambda - f) = 0$ y $\widehat{f}(\phi) = \lambda$. De aquí que $\lambda \in \widehat{f}(M_A)$.

Recíprocamente, sea $\lambda \in \widehat{f}(M_A)$. Si se selecciona ϕ, tal que $\widehat{f}(\phi) = \lambda$, entonces $\phi(\lambda - f) = 0$, por lo que $\lambda - f$ no es inversible y $\lambda \in \sigma(f)$. **Q.e.d.**

A continuación se presentan algunos ejemplos clásicos que ilustran lo anteriormente expuesto.

Ejemplo 1:

El álgebra $C(X)$ de todas las funciones complejas continuas sobre un espacio de Hausdorff compacto X es un álgebra de Banach con la norma usual del supremo

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Cualquier $x \in X$ determina el homomorfismo evaluación $\phi_x \in M_{C(X)}$ definido por

$$\phi_x(f) = f(x), \quad \forall f \in C(X).$$

TEOREMA 1.10
Cualquier $\phi \in M_{C(X)}$ es un homomorfismo evaluación en algún punto $x \in X$.

Demostración:

Sea $\phi \in M_{C(X)}$ distinto de ϕ_x para toda $x \in X$. Entonces para cualquier $x \in X$, se selecciona $f_x \in C(X)$ tal que $f_x(x) \neq 0$, mientras que $\phi(f) = 0$. De este modo $|f_x^2|$ es positivo en una vecindad de x y se tiene que

$$\phi(|f_x|^2) = \phi(f_x)\phi(\overline{f_x}) = 0.$$

Seleccionando $x_1...x_n \in X$, tales que $|f_{x_1}|...|f_{x_n}| = g$ es positivo en X, se cumple que g es inversible en $C(X)$. Esto contradice que el hecho de que $\phi(g) = 0$. **Q.e.d.**

Este teorema muestra que X y $C(X)$ son homeomorfos. En particular el espacio X está completamente determinado por la estructura de álgebra de Banach de $C(X)$.

Ejemplo 2:

Cualquier álgebra uniformemente cerrada A de $C(X)$ que contenga a las constantes es un álgebra de Banach conmutativa con la norma del supremo. Si A separa los puntos de X, la correspondencia $x \mapsto \phi_x$ es una inmersión de X como subconjunto cerrado de M_A. El siguiente caso especial muestra cómo pueden surgir ideales maximales que no estén incluidos en X.

Se denota por Δ al disco unidad cerrado $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$ en el plano complejo. Su frontera $\partial\Delta$ es el círculo unidad $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. La subálgebra de las funciones en $C(\partial\Delta)$ que pueden ser aproximadas uniformemente sobre $\partial\Delta$ por polinomios en z se denota por $P(\partial\Delta)$.

El k-ésimo coeficiente de Fourier de la función $f \in C(\partial\Delta)$ está dado por

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})e^{ik\phi}d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta} f(z)z^{-k-1}dz. \end{aligned}$$

Por el teorema de Fejer (ver [7]), f es el límite uniforme de las funciones

$$\sigma_n = \frac{f_0 + ... + f_n}{n+1},$$

donde

$$f_m = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ik\phi} = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^k, \qquad z = e^{i\phi}.$$

Si los coeficientes de Fourier negativos de la función $f \in C(\partial\Delta)$ se anulan, entonces las f_m y las σ_n son polinomios en z. Así $f \in P(\partial\Delta)$. Además, por el principio del módulo máximo, los polinomios σ_n convergen uniformemente sobre Δ al prolongamiento continuo $\bar{f}$ de f a Δ, el cual es analítico en $int(\Delta)$.

Recíprocamente, si $f \in C(\partial\Delta)$ puede ser prolongada continuamente a Δ y analíticamente en $int(\Delta)$, entonces, por el teorema de Cauchy, los coeficientes de Fourier negativos de f se anulan. En particular, los coeficientes de Fourier negativos de cualquier $f \in P(\partial\Delta)$ se anulan.

Esto muestra la equivalencia de las siguientes afirmaciones para una función $f \in C(\partial\Delta)$

(i) $f \in P(\partial\Delta)$.

(ii) f se prolonga continuamente a Δ y analíticamente en $int(\Delta)$.

(iii) Los coeficientes de Fourier negativos de f se anulan.

Cualquier $\lambda \in \Delta$ determina un homomorfismo ϕ_λ de $P(\partial\Delta)$, obtenido de evaluar el prolongamiento analítico de funciones de $P(\partial\Delta)$ en λ. La correspondencia $\lambda \mapsto \phi_\lambda$ sumerge a Δ como subconjunto cerrado en $M_{P(\partial\Delta)}$. Se acostumbra a identificar a Δ con su imagen por la inmersión en $M_{P(\partial\Delta)}$.

Sea ahora $\phi \in M_{P(\partial\Delta)}$ y sea $\lambda = \phi(z)$, donde z es la función coordenada. Puesto que $\|z\|_{\partial\Delta} = 1$, se tiene que $|\lambda| \leq 1$, es decir, $\lambda \in \Delta$. También se cumple que $\phi(p(z)) = p(\lambda) = \phi_\lambda(p)$ para todos los polinomios p. Puesto que los polinomios son densos en $P(\partial\Delta)$, se deduce que ϕ coincide con ϕ_λ.

Consecuentemente el espacio de ideales maximales de $P(\partial\Delta)$ coincide con Δ.

Ejemplo 3:

Sea $0 < \alpha \leq 1$ y sea $Lip_\alpha[0,1]$ el conjunto de todas las funciones continuas con valores complejos en $[0,1]$ que satisfacen una condición de Lipschitz de orden α. La norma en $Lip_\alpha[0,1]$ está dada por

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^\alpha}$$

El espacio $Lip_\alpha[0,1]$ es un álgebra de Banach con el producto puntual usual de funciones. Se comprueba fácilmente que el espacio de ideales maximales de $Lip_\alpha[0,1]$ es $[0,1]$.

Ejemplo 4:

Sea G un grupo abeliano localmente compacto con medida de Haar σ. El espacio de Banach $L^1(\sigma)$, junto con el producto de convolución definido por

$$(f*g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)d\sigma(y),$$

es un álgebra de Banach conmutativa, que se denota por $L^1(G)$. El álgebra $L^1(G)$ no tiene identidad a menos que G sea discreto.

Se define un caracter de G como un homomorfismo continuo de G en el disco unidad. El conjunto $\widehat{G}$ de todos los caracteres de G es un grupo, cuya operación es la multiplicación puntual. Con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, $\widehat{G}$ se convierte en un grupo abeliano localmente compacto, llamado el grupo caracter o grupo dual de G. El Teorema de la dualidad de Pontriaguin (ver [10]) establece que el grupo dual de $\widehat{G}$ es G.

Cualquier caracter χ de $\widehat{G}$ determina un homomorfismo continuo de $L^1(G)$ a través de la fórmula

$$(f * g)(x) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}d\sigma(x).$$

De esta manera, cualquier homomorfismo continuo no nulo de $L^1(G)$ se origina a partir de un caracter de G. El espacio de ideales maximales de $L^1(G)$ es homeomorfo a $\widehat{G}$.

Sea ahora G el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Todo caracter de $\mathbb{R}$ es de la forma $s \mapsto e^{ist}$ para algún número real t. Luego $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. La transformada de Gelfand se convierte entonces en la transformada de Fourier usual

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-ist}ds.$$

A continuación se presentan dos teoremas que resultan básicos y sumamente importantes en el desarrollo de la teoría de las álgebras de Banach. El primero es relativo a la aplicación de determinadas funciones analíticas a elementos de álgebras de Banach. El segundo es una fórmula para el radio espectral.

Teorema 1.11
Sean A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y $f \in A$. Sea h una función con valores complejos que está definida y es analítica en una vecindad de $\widehat{f}(M_A) = \sigma(f)$. Entonces existe $g \in A$, tal que $\widehat{g} = h \circ \widehat{f}$.

Demostración:
La fórmula de Cauchy establece que

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z - z_0}dz, \qquad z \in \sigma(f),$$

para un contorno apropiado Γ contenido en $\sigma(f)$. Se define

$$g = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(z)(z - f)^{-1}dz$$

Esta integral existe en el sentido de Riemann.

Aproximando la integral por sumas de Riemann finitas, se observa que para $\phi \in M_A$ se cumple

$$\phi(g) = \frac{1}{2\pi i} \int h(z)(z - \phi(f))^{-1} dz = h(\phi(f)).$$

Consecuentemente es $\widehat{g} = h \circ \widehat{f}$. **Q.e.d.**

El radio espectral de $f \in A$ es por definición el valor

$$\sup_{\lambda \in \sigma(f)} |\lambda|.$$

Por teorema 1.9, el radio espectral de f coincide con $\|\widehat{f}\|_{M_A}$.

TEOREMA 1.12

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. El radio espectral de $f \in A$ está dado por la fórmula

$$\|\widehat{f}\|_{M_A} = \lim_{n \to \infty} \|f^n\|^{1/n}.$$

Demostración:

Para cualquier entero positivo n y cualquier $\phi \in, M_A$ se cumple

$$|\widehat{f}(\phi)| = |\widehat{f}^n(\phi)|^{1/n} \leq \|f^n\|^{1/n},$$

Consecuentemente es

$$\|\widehat{f}\|_{M_A} \leq \lim_{n \to \infty} \inf \|f^n\|^{1/n}.$$

Ahora, sea L un funcional lineal continuo sobre A. Se define

$$h(\lambda) = L((\lambda - f)^{-1})$$

para $\lambda \notin \sigma(f)$. Entonces h es analítica fuera de $\sigma(f)$ y se cumple que

$$h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(f^n)}{\lambda^{n+1}}$$

para cualquier λ. Puesto que h es analítica para $|\lambda| > \|\widehat{f}\|_{M_A}$, la representación en serie debe ser convergente para todo λ que satisfaga $|\lambda| > \|\widehat{f}\|_{M_A}$. Por lo tanto

$$\sup_n \frac{|L(f^n)|}{|\lambda|^{n+1}} < \infty$$

dondequiera que $|\lambda| > \|\widehat{f}\|_{M_A}$.

Si se fija un λ que satisfaga $|\lambda| > \|\widehat{f}\|_{M_A}$, el supremo anterior debe ser finito para todos los funcionales lineales continuos L sobre A. Por el principio de acotación uniforme se tiene que

$$\sup_n \frac{\|f^n\|}{|\lambda|^{n+1}} = M < \infty,$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|f^n\|^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \sup M^{1/n}|\lambda|^{1+1/n} = \lambda$$

Puesto que esto es cierto siempre y cuando $|\lambda| > \|\widehat{f}\|_{M_A}$, se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|f^n\|^{1/n} \leq \|f\|_{M_A},$$

completándose así la demostración. **Q.e.d.**

Corolario 1.1.1

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. La transformada de Gelfand $f \to \widehat{f}$ es una isometría si y solo si $\|f^2\| = \|f\|^2$ para todo $f \in A$.

Demostración:
Si $f \to \widehat{f}$ es una isometría, entonces

$$\|f^2\| = \|\widehat{f}^2\|_{M_A} = \|\widehat{f}\|^2_{M_A} = \|f\|^2.$$

Recíprocamente, si $\|f^2\| = \|f\|^2$ para todo $f \in A$, entonces $\|f^{2^n}\| = \|f\|^{2^n}$ para todo $n > 1$. De esta manera se tiene que

$$\|f\| = \|f^{2^n}\|^{1/2^n} = \|\widehat{f}\|_{M_A}.$$

Q.e.d.

B^*-Álgebras conmutativas

En esta sección se estudiarán las propiedades de las álgebras $C(X)$, siendo X un espacio de Hausdorff compacto. Con este propósito se introduce una versión abstracta del operador de conjugación complejo, que transforma a una función en su conjugado complejo.

Definición 1.5

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Una involución de A es una operación $f \mapsto f^*$ de A en A, que satisface

(i) $f^{**} = f$,

(ii) $(f+g)^* = f^* + g^*$,

(iii) $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$,

(iv) $(fg) = f^* g^*$,

donde f y g son elementos cualesquiera de A y λ es un número complejo. Una B^*-álgebra conmutativa es un álgebra de Banach conmutativa A con una involución $f \to f^*$ que satisface

$$\|f^* f\| = \|f\|^2 \quad \forall f \in A.$$

El siguiente teorema se refiere a la transformada de Guelfand en una B^*-álgebra conmutativa.

Teorema 1.13

Sea A una B^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico de A en $C(M_A)$, el cual satisface

$$\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}} \quad \forall f \in A.$$

La afirmación más importante de este teorema es el hecho de que la transformada de Gelfand convierte a la involución en conjugación compleja. Antes de comenzar la prueba, conviene demostrar algunos lemas.

Lema 1.1.3

Sea A una B^*-álgebra conmutativa. Si $f \to f^*$ es una involución de A, entonces $1^* = 1$.

Demostración: $1^* = 11^* = 1^{**}1^* = (1^*1)^* = 1^{**} = 1$. **Q.e.d.**

Lema 1.1.4

Si A es una B^*-álgebra conmutativa y $f \in A$, entonces se cumple que

$$\|f^2\| = \|f\|^2 \quad y \quad \|f\| = \|f^*\|.$$

Demostración:

$$\|f^2\|^2 = \|(f^2)^* f^2\| = \|(f^* f)^*(f^* f)\| = \|f^* f\|^2 = \|f\|^4,$$

de esta manera es $\|f^2\| = \|f\|^2$. Asímismo es

$$\|f\|^2 = \|f^* f\| = \|f^{**} f^*\| = \|f^*\|^2,$$

por lo que $\|f\| = \|f^*\|$. **Q.e.d.**

LEMA 1.1.5
Sea A una B^* -álgebra conmutativa. Si $f \in A$ satisface $f^* = f^{-1}$, entonces $|\widehat{f}| = 1$. Si $g \in A$ satisface $g^* = g$, entonces $\widehat{g}$ es real.

Demostración:
Sea $f^* = f^{-1}$. Entonces también $(f^{-1})^* = f$. Así es

$$1 = \|f^* f\| = \|f\|^2 \quad \text{y} \quad 1 = \|(f^{-1})^* f^{-1}\| = \|f^{-1}\|^2.$$

Esto se deduce de que $\sigma(f)$ y $\sigma(f^{-1})$ están contenidos en el disco unidad Δ, lo cual sólo sucede cuando $|\lambda| = 1$ para todo $\lambda \in \sigma(f)$, es decir, cuando $\widehat{f}$ tiene módulo 1.

Ahora, si h pertenece a cualquier álgebra de Banach, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}$$

converge a un elemento e^h que satisface $\widehat{e^h} = e^{\widehat{h}}$. Puede comprobarse fácilmente que e^h es inversible y su inverso es e^{-h}.

En este caso, la involución $h \to h^*$ es continua, por el lema 1.1.4. Consecuentemente para $h \in A$ es

$$(e^h)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h^*)^n}{n!} = e^{h^n}.$$

Sea ahora $g^* = g$ y sea $f = e^{ig}$. Entonces

$$f^* = e^{-ig^*} = e^{-ig} = f^{-1}.$$

Por la primera parte del lema, $\sigma(f)$ es un subconjunto del círculo unidad. Por lo tanto, $\sigma(g)$ debe ser real. Esto completa la prueba. **Q.e.d.**

Demostración del teorema 1.14:
Por el corolario del teorema 1.12 y el lema 1.1.4, la transformada de Gelfand es una

isometría de A sobre la subálgebra cerrada $\widehat{A}$ de $C(M_A)$.

Si $f \in A$, sean

$$g = \frac{f + f^*}{2} \qquad \text{y} \qquad h = \frac{f - f^*}{2i}.$$

Entonces $f = g + ih$, $g = g^*$ y $h = h^*$. De esta manera es $f^* = g^* - ih^*$. Aplicando el lema 1.1.5, se obtiene

$$\widehat{f^*} = \widehat{g^*} - i\widehat{h^*} = \widehat{g} - i\widehat{h^*} = \overline{\widehat{f}}.$$

Esta fórmula muestra, en particular, que si $\widehat{f} \in \widehat{A}$, entonces el conjugado complejo $\overline{\widehat{f}}$ de $\widehat{f}$ también está en $\widehat{A}$. Puesto que $\widehat{A}$ contiene a las constantes y separa los puntos de M_A, $\widehat{A}$ debe coincidir con $C(M_A)$, por el teorema de Stone-Weierstrass (ver [1]). Esto completa la demostración. **Q.e.d.**

El teorema de representación de Riesz (ver [7]) para funcionales continuos definidos en el espacio de las funciones continuas que se anulan en el infinito será de gran utilidad en el desarrollo de los resultados esta tesis.

Teorema 1.14 *(de representación de Riesz)*
Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Entonces para cada funcional lineal continuo Λ sobre $C_0(X)$, existe una única medida regular $\mu \in MR(X)$, tal que para todo $f \in C_0(X)$ se tiene la representación

$$\Lambda f = \int f d\mu$$

y se cumple que

$$\|\Lambda\| = \|\mu\|.$$

También resultará útil el teorema de la unicidad de la transformada de Fourier en $L^1(G)$ (ver [5]), para un grupo localmente compacto G.

Teorema 1.15
Si $x, y \in L^1(G)$ con G un grupo localmente compacto, y

$$\int x(g)e^{i\chi(g)}dg = \int y(g)e^{i\chi(g)}dg$$

para todos los los caracteres χ del grupo G, entonces $x(g)$ y $y(g)$ coinciden para toda $g \in G$.

1.2. Los espacios $V_p[a,b]$ y $C_p[a,b]$

En este epígrafe se presentan (sin demostración) las definiciones y resultados conocidos sobre los espacios $V_p[a,b]$ y $C_p[a,b]$ (ver [16]), los cuales serán generalizados ~~y estudiados~~ en esta tesis desde el punto de vista de las Álgebras de Banach.

DEFINICIÓN 1.6
Una función f definida sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ es de p-variación acotada ($1 \leq p < \infty$) si el valor

$$V_p(f) = \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es finito, donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$. El espacio $V_p[a,b]$ de la funciones de p-variación acotada con el valor inicial $f(a) = 0$ es un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|_{V_p} = V_p(\cdot)$ $\cancel{(1 \leq p < \infty)}$.

Resulta sencillo comprobar que toda función de p-variación acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ es acotada en ese intervalo.

TEOREMA 1.16
Toda función de p-variación acotada en $[a,b]$ es también de q-variación acotada para todo número real $q > p$ y tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades, todas evitables o no evitables de primera especie.

TEOREMA 1.17
El espacio $V_p[a,b]$ no es separable y contiene un subespacio isomorfo a c_0.

TEOREMA 1.18
Para dos funciones f, g de p-variación acotada y q-variación acotada respectivamente en $[a,b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ y para partición cualquiera π de $[a,b]$ se cumple la acotación

$$|\sigma_\pi(f,g)| \leq \left\{ 1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right\} V_p(f) V_q(g),$$

donde $\sigma_\pi(f,g)$ es la suma de Riemann-Stieltjes de f respecto a g y π y

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$$

es la función Zeta de Riemann. En el caso $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ el valor $\left\{ 1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right\}$ no puede ser sustituido por una constante.

Definición 1.7

El módulo de p-continuidad ($1 < p < \infty$) de una función f definida en $[a,b]$ está definido por la igualdad

$$\omega_p(\delta)(f) = \sup_{\pi_\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi_\delta : a = t_0 < \ldots < t_n = b$ del intervalo cerrado $[a,b]$, para las que se cumple $(t_i - t_{i-1}) < \delta$ para ~~toda~~ $1 \leq i \leq n$. Una función f se dice absolutamente p-continua si se cumple

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta)(f) = 0.$$

El espacio $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas con el valor inicial $f(a) = 0$ es un subespacio cerrado de $V_p[a,b]$. ~~La única función que es absolutamente 1-continua es $f \equiv 0$.~~

Un ejemplo interesante resulta la conocida función de Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \qquad x \in [0,1],$$

para un número entero cualquiera $a > 1$, la cual es de 2-variación acotada y absolutamente p-continua para todo número real $p > 2$.

Teorema 1.19

Toda función absolutamente p-continua en $[a,b]$ es continua en ese intervalo. El recíproco ~~de esa proposición~~ no se cumple en general.

Teorema 1.20

Para toda función f de p-variación acotada sobre $[a,b]$ se define la función $\phi(x) = V_p(f,a,x)$, la cual es monótona creciente. Si f es absolutamente p-continua, entonces ϕ también es absolutamente p-continua en $[a,b]$.

Una función f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ se dice Lipschitz-continua del orden α para $0 < \alpha \leq 1$, si para cualesquiera dos puntos x, y de $[a,b]$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha,$$

con una constante M que sólo depende de f.

Teorema 1.21

Toda función Lipschitz-continua del orden α es de $\frac{1}{\alpha}$-variación acotada y absolutamente p-continua en $[a,b]$ para todo número real $p > \frac{1}{\alpha}$.

Teorema 1.22

El espacio $C_p[a,b]$ es separable.

Teorema 1.23

La ~~inclusión~~ Id_p de $C_p[a,b]$ $(p > 1)$ en el espacio $C[a,b]$ de las funciones continuas sobre $[a,b]$ no es compacta.

Teorema 1.24 *(de representación)*

Sea f una función absolutamente p-continua y g una función de q-variación acotada en $[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$, entonces existe la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a g en $[a,b]$ y se cumple la acotación

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \left\{1+\zeta\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)V_q(g),$$

donde $\zeta(t)$ es la función Zeta de Riemann.

Teorema 1.25 *(recíproco de representación)*

Toda funcional lineal continua F sobre $C_p[a,b]$ para $1<p<\infty$ se puede representar a través de una integral de Riemann-Stieltjes de la forma

$$F(f)=\int_a^b f(x)dg(x),$$

donde g es una función de q-variación acotada en $[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Se cumple

$$\| g \|_{V_q} \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \| F \| .$$

Pero el espacio dual del espacio $C_p[a,b]$ no puede ser identificado con $V_q[a,b]$.

Capítulo 2

UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN

2.1. Las álgebras V_p y C_p

En el presente epígrafe se generaliza la definición de los espacios de funciones de p-variación acotada y de funciones absolutamente p-continuas al caso de funciones complejas de variable real y se exponen algunas propiedades que son útiles para la comprensión del comportamiento de los mismos.

Definición 2.1

Sea Π el conjunto de todas las particiones de compactos K de $\mathbb{R}$ y $p > 1$ un número real. Se dice que una función compleja definida sobre la recta real es de p-variación acotada, si para cualquier partición $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \Pi$ se cumple que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

En ese caso se llama p-variación de f al valor

$$pvar(f) = \sup_K \sup_\Pi (\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_i - i)|^p)^{\frac{1}{p}},$$

donde los supremos se toman sobre todos los compactos K de $\mathbb{R}$ y todas las particiones $\pi \in \Pi$.

Se denota por V_p al espacio de las funciones de p-variación acotada, tales que $f(-\infty) = 0$ y existen y son finitos los límites $f(+\infty)$, $f(t+0)$ y $f(t-0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, con la norma

$$\|f\|_p = pvar(f)$$

y el producto

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)dg(\tau),$$

donde la integral se toma en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2.1

V_p es un espacio de Banach.

Demostración:
Se puede comprobar fácilmente que la p-variación es una norma (la desigualdad triangular se verifica con la ayuda de la desigualdad de Minkowski). Sea ahora $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V_p. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$ para todos $m, n \geq N_\varepsilon$, o sea,

$$\sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_n - f_m)(t_i) - (f_n - f_m)(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon.$$

Entonces para todo t fijo, la sucesión $\{f_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, pues para la partición $\pi_a = -a < t < a$, con a suficientemente grande se tiene

$$\begin{aligned} |(f_m - f_n)(t)|^p &\leq |(f_m - f_n)(t) - (f_m - f_n)(-a)|^p \\ &\quad + |(f_m - f_n)(a) - (f_m - f_n)(t)|^p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sea $f(t) = \lim f_m(t)$ para todo $t \in (-\infty, +\infty)$. Se busca una cota para $\|f_m - f\|_p$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |(f_m - f_n)(t_i) - (f_m - f_n)(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |(f_m - f)(t_i) - (f_m - f)(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon,$$

de aquí que sea

$$\|f_m - f\|_p \leq \varepsilon \qquad \forall m \geq N_\varepsilon.$$

Por otra parte, para un $m \geq N_\varepsilon$ se cumple

$$\|f\|_p \leq \|f - f_m\|_p + \|f_m\|_p \leq C$$

quedando así demostrado que V_p es un espacio de Banach. **Q.e.d.**

Resulta importante notar que las propiedades relativas a la norma en el espacio $V_p[a,b]$ presentadas en el capítulo anterior se extienden de manera natural al espacio V_p. Como ejemplo de ello se presenta la demostración de la siguiente propiedad.

Teorema 2.2

Sean $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ y $p > q$ entonces se cumple que $V_p \supset V_q$.

Demostración: Sea f de V_p dada. Resulta sencillo comprobar que f es acotada. Sea

$$M = \sup\{|f(x) - f(y)|; \qquad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{q-p}\right)^{\frac{1}{q}},$$

para toda partición $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ de un compacto cualquiera K de $\mathbb{R}$, o sea,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq (M^{q-p})^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De aquí se deduce entonces

$$qvar(f) \leq \widehat{M} V_p^{\frac{p}{q}}(f) < \infty,$$

siendo ~~así~~

$$\widehat{M} = M^{\frac{q-p}{q}},$$

y por tanto f pertenece también a V_q. **Q.e.d.**

El siguiente teorema justifica el tratamiento del espacio V_p a partir de la teoría de las álgebras de Banach.

Teorema 2.3

El espacio V_p tiene estructura de álgebra de Banach conmutativa y unitaria. La unidad $\epsilon(t)$ es la función de Heaviside

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Demostración:
Sean $f, g, h \in V_p$. Entonces es

$$[(f*g)*h](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t-u)dh(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u-\tau)dg(\tau) \right] dh(u).$$

Por otra parte, es

$$[(f*h)*g](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*h)(t-u)dg(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u-\tau)dh(\tau) \right] dg(u),$$

y por simetría de $f(t-u-\tau)$ se cumple

$$[(f*h)*g](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*h)(t-u)dg(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u-\tau)dh(u) \right] dg(\tau).$$

Si se considera sobre $\mathbb{R}$ a la tribu boreliana y a la medida de Stieltjes, el teorema de Fubini garantiza la igualdad de $[(f*g)*h](t)$ y $[(f*h)*g](t)$, de donde, haciendo $f(t) = \epsilon(t)$, se deduce

$$(\epsilon * g) * h = (\epsilon * h) * g \quad \Rightarrow \quad g * h = h * g, \quad \forall g, h \in V_p,$$

siendo $\epsilon(t)$ es la función de Heaviside.

$\epsilon(t)$ es la identidad en V_p, pues

$$(f*\epsilon)(t) = \lim_{b\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t-\xi_i)[\epsilon(\tau_i) - \epsilon(\tau_{i-1})],$$

donde los τ_i son puntos de una partición del intervalo $[-b, b], b > 0$, que contiene al cero, y además $\xi_i = \tau_i$ $(i = 1, ..., n)$. De aquí que $(f*\epsilon)(t) = f(t)$. Haciendo el cambio $u = t - \tau$ e integrando se deduce de ello que $(\epsilon * f)(t) = f(t)$.

Por otra parte se verifica inmediatamente que $\|\epsilon(t)\| = 1$.

La asociatividad se obtiene a partir de la conmutatividad y la igualdad

$$(f*h)*g = (f*g)*h,$$

pues de esta se deduce que

$$g*(f*h) = (g*f)*h.$$

Resta demostrar la relación

$$\|f*g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_p$$

entre la norma y el producto. Al respecto se tiene

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_p &= \sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^n \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t_i-\tau)-f(t_{i-1}-\tau)]dg \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t_i-\tau)-f(t_{i-1}-\tau)|^p |dg|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_K \sup_\Pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n |f(t_i-\tau)-f(t_{i-1}-\tau)|^p |dg|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_p \sup_K \sup_\Pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |dg|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f\|_p \|g\|_p.
\end{aligned}$$

Con ello queda demostrada la proposición. **Q.e.d.**

De gran importancia resulta el estudio del subespacio C_p de V_p formado por las funciones absolutamente p-continuas.

Definición 2.2

Sea $\delta\Pi$ el conjunto de todas las particiones de compactos K de $\mathbb{R}$ y $p > 1$ un número real. Se llama módulo de p-continuidad de $f \in V_p$ en $\mathbb{R}$ al valor

$$\omega_p(\delta)(f) = \sup_K \sup_{\delta\Pi} \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i)-f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde las particiones de $\delta\Pi$ son tomadas tales que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para todo $i = 1, ..., n$.
Una función $f \in V_p$ se dice absolutamente p-continua ($f \in C_p$) si se cumple que

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta)(f) = 0.$$

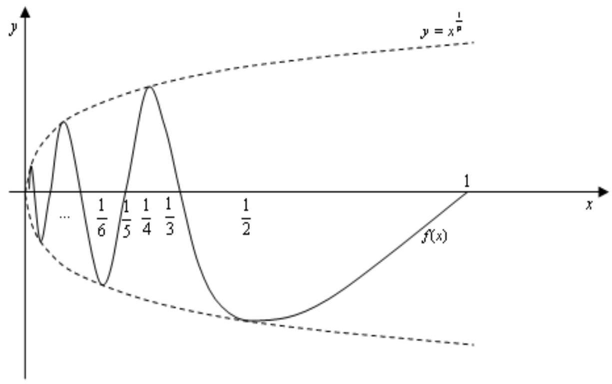
Es obvio que $C_p \subset V_p$ y que toda $f \in C_p$ es continua. Sin embargo, no toda función continua es necesariamente absolutamente p-continua, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo:
Sea definida en $\mathbb{R}$ la función continua

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{p}} \cos(\frac{\pi}{2x}) & x \in (0,1] \\ 0 & x \notin (0,1] \end{cases}, \tag{2.1}$$

donde p es un número real cualquiera con $p \geq 1$ (ver figura 2.1).

Figura 2.1:



Este ejemplo resulta interesante por presentar una función que es de q-variación acotada para todo número real $q > p$, pero no es de q-variación acotada para $q \leq p$.

Demostración:
Como f se anula fuera del intervalo $[0, 1]$, basta demostrar estas relaciones en ese intervalo. Para ello sea la partición $\pi : 0 = t_{2n+1} < t_{2n} < \ldots < t_1 = 1$ del intervalo cerrado $[0, 1]$ con $t_i = \frac{1}{i}$. Entonces para $k = 1, \ldots, n$ es

$$\begin{aligned} f(t_{2k-1}) &= 0 \\ f(t_{2k}) &= (-1)^k \left(\tfrac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

En este caso la suma

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

corresponde a la serie armónica

$$\left(\sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{2k} \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.2}$$

la cual diverge para $q \leq p$. Entonces para $q \leq p$, existe una sucesión π_n de particiones de $[0, 1]$, tal que las sumas

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

constituyen una sucesión creciente no acotada, y con ello la función dada no es de q-variación acotada en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Para calcular ahora la q-variación de la función (2.1) para un número real $q > p$, sea $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ una partición cualquiera de $[0, 1]$. Agregando los puntos $t'_1, t'_2 \ldots, t'_{2m+1}$ con $t'_i = \frac{1}{i}$ para $1 \leq i \leq 2m$ y $t'_{2m+1} = 0$ de la partición π', se construye una nueva partición $\pi'' : 0 = t''_0 < t''_1 < \ldots < t''_s = 1$ con $s \leq n + 2m + 1$ de $[0, 1]$. Entonces se cumple

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{s} |f(t''_j) - f(t''_{j-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Reordenando la parte derecha de esta desigualdad es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(ti-1)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{2m} \sum_{j=j_k+1}^{j_{k+1}} |f(t''_j) - f(tj-1'')|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

donde la suma interior se desarrolla sobre todos los subintervalos de la partición π'' que están en el intervalo $[t'_k, t'_{k+1}]$ de la partición π'. Es claro que la función dada es monótona en cada subintervalo de la partición π'. Entonces la función f pertenece a los conjuntos $V_1[t'_k, t'_{k+1}]$ $(k = 1, \ldots, 2m)$, y por tanto a $V_q[t'_k, t'_{k+1}]$ para $q > 1$. Así se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{2m} V_q^q(f; t'_k, t'_{k+1})\right)^{\frac{1}{q}},$$

o sea,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{2m} |f(t'_{k+1}) - f(t'_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pero la parte derecha de esta desigualdad se corresponde en este caso a la serie armónica (2.2), que converge para $q > p$. De aquí se deduce entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

para toda partición de $[0, 1]$ y $q > p$, y con ello la función dada es de q-variación acotada en el intervalo cerrado $[0, 1]$ para todo número real $q > p$. **Q.e.d.**

Del producto definido en V_p y la expresión del módulo de p-continuidad se deduce siguiente teorema.

Teorema 2.4

C_p es un ideal de V_p.

Demostración:
Sean $f \in C_p$ y $g \in V_p$, entonces

$$\begin{aligned}
\omega_p(\delta)(f*g) &= \sup_K \sup_{\delta\Pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} ((f*g)(t_i-\tau) - (f*g)(t_{i-1}-\tau))dg(\tau) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_K \sup_{\delta\Pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} |(f*g)(t_i-\tau) - (f*g)(t_{i-1}-\tau)|^p |dg(\tau)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \omega_p(\delta)(f) \cdot \omega_p(\delta)(g).
\end{aligned}$$

Pero $\omega_p(\delta)(f) \to 0$ cuando $\delta \to 0$, por lo que $(f*g) \in C_p$, lo cual demuestra el teorema. **Q.e.d.**

Las siguientes observaciones establecen una importante relación entre el álgebra de las funciones absolutamente integrables con la unidad adjunta L_a^1 y el álgebra de las funciones de variación acotada (para definición de álgebra con unidad adjunta ver [6]).

Sea $g(t) \in C_1 \subset V_1 \subset V_p$. Entonces $g(t)$ es diferenciable y su derivada es tal que

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} g'(\tau)d\tau.$$

De ello se deduce que

$$\|g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(t)|dt = \|g'\|_{L_a^1},$$

pues

$$\begin{aligned}
\|g\|_1 &= \sup_K \sup_{\Pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \right) \\
&= \sup_K \sup_{\Pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'(\tau)d\tau \right| \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(\tau)|d\tau = \|g'\|_{L_a^1}.
\end{aligned}$$

Además, el producto de funciones absolutamente continuas corresponde con el producto de sus derivadas como funciones de L_a^1. Es decir, si

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t-\tau)dg_2(\tau),$$

entonces se cumple

$$g'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1'(t-\tau)g_2'(\tau)d\tau.$$

De lo anterior se deduce que si se asigna a cada $\lambda e + f(t) \in L_a^1$ la función

$$\lambda\epsilon(t) + \int_{-\infty}^{t} f(\xi)d\xi,$$

se obtiene un isomorfismo isométrico del álgebra L_a^1 en el álgebra V_1, por lo que L_a^1 es una subálgebra de V_1.

2.2. El teorema de representación

Sea ahora $f(t) \in V_p$. Resulta sencillo comprobar que la integral

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}df(t)$$

existe para todo $s \in \mathbb{R}$. Esta integral es llamada transformada de Fourier-Stieltjes de la función $f(t)$. Es claro que la adición y la multiplicación por un escalar de una función de V_p corresponden con las de su transformada de Fourier-Stieltjes. La convolución de funciones en V_p, (como comúnmente se designa al producto sobre esta álgebra), corresponde también con el producto de sus transformadas

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}d\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)dg(u)\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}df(t-u)\right)dg(u)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(t-u)}df(t-u)\right)e^{isu}dg(u)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}df(t)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isu}dg(u)
\end{aligned}$$

De esta manera, haciendo corresponder a cualquier función $f(t) \in V_p$ el valor de su transformada de Fourier-Stieltjes en cualquier punto fijo s_0, se obtiene un homomorfismo del álgebra V_p en el campo de los números complejos. El ideal generado por este homomorfismo se denota por M_{s_0}. Entonces

$$f(M_{s_0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is_0t}df(t) = F(s_0).$$

Nótese que si $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ con $s_1 \neq s_2$, existe al menos una función absolutamente continua tal que $g(M_{s_1}) \neq g(M_{s_2})$.

Sea $f(t) \in V_p$, tal que $f(t) \in M_s$ para todo $s \in \mathbb{R}$, (es decir, $f(M_s) = F(s) = 0$). La función

$$g_h(t) = \begin{cases} 0 & t < -h \\ 1 + \frac{t}{h} & -h \leq t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

es absolutamente continua. Entonces por el lemma 2.4, la función

$$(f * g_h)(M_s) = \frac{1}{h} \int_0^h f(t + \tau) d\tau$$

también es absolutamente continua. De aquí que

$$(f * g_h)(M_s) = f(M_s) g_h(M_s) = 0.$$

Entonces, por el teorema de unicidad de la transformada de Fourier en L^1 se tiene que $(f * g_h)(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pero $(f * g_h)(t) \to f(t)$ cuando $h \to 0$, por lo que se concluye que $f(t) = 0$.

De lo anterior se deduce que $f(t) \in V_p$ está unívocamente determinada por su transformada de Fourier-Stieltjes y que el radical $Rad(V_p) = \bigcap \{M;\ M \in M_{V_p}\}$ de V_p es vacío, o lo que es lo mismo, V_p es un álgebra semisimple.

Al ser V_p semisimple, la transformada de Gelfand es un isomorfismo de V_p en un subespacio de $C(M_{V_p})$, donde $C(M_{V_p})$ es el álgebra de todas las funciones continuas con valores complejos definidas sobre el espacio de ideales maximales de V_p. Como M_{V_p} es Hausdorff compacto, se tiene $C(M_{V_p}) = C_0(M_{V_p})$ (ver, por ejemplo, [7]), por lo que el teorema de representación de Riesz garantiza la existencia de una única medida regular $\mu \in MR(M_{V_p})$ definida sobre M_{V_p} para cada funcional lineal continuo Φ sobre $C(M_{V_p})$. Considerando para cada funcional lineal continuo Φ sobre $C(M_{V_p})$ su restricción al correspondiente subespacio isomorfo a V_p, se cumple entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.5 *(de representación)*
Para cada funcional lineal y continuo Φ definido sobre V_p existe una única medida regular μ tal que

$$\Phi(f) = \int_{M_{V_p}} f d\mu, \quad \forall f \in V_p$$

y se cumple

$$\|\Phi\| = \|\mu\|.$$

Este teorema garantiza la posibilidad de identificar al dual de V_p con el espacio de las medidas regulares definidas sobre M_{V_p}. La integración indicada en el teorema se efectúa sobre el espacio de ideales maximales de V_p, del cual no se tiene una caracterización.

En el siguiente capítulo se presentan algunas observaciones sobre el espacio de ideales de V_p, las cuales pudieran constituir la base en la búsqueda de una caracterización de M_{V_p}.

Capítulo 3

ACERCA DE LOS IDEALES DE V_p

Este capítulo estará dedicado al estudio del espacio de los ideales de V_p. Como se mencionó anteriormente, la importancia de este estudio radica esencialmente en la necesidad de obtener una caracterización de M_{V_p} para la integración en el teorema 2.5.

DEFINICIÓN 3.1
Un álgebra topológica es un espacio topológico lineal dotado de una multiplicación asociativa tal que para toda vecindad U_α del origen existe otra vecindad U_{β^2} del origen, tal que

$$U_{\beta^2} \subset U\alpha.$$

TEOREMA 3.1
V_p es un álgebra topológica.

Demostración:
Sea $U_\alpha \in \widehat{\Phi}$ una vecindad del origen en V_p, entonces para toda $f \in U_\alpha$ es

$$\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \alpha, \quad t_i \in \pi,\ \forall i = 1, \ldots, n,$$

siendo π una partición cualquiera de K y K un compacto cualquiera de $\mathbb{R}$. Si se selecciona U_{β^2}, tal que $\beta^2 < \alpha$, entonces para todas $g_1, g_2 \in U_{\beta^2}$ se tiene que

$$\|g_1 * g_2\|_p \leq \|g_1\|_p \|g_2\|_p < \beta^2 < \alpha,$$

lo cual demuestra la proposición. **Q.e.d.**

Definición 3.2

Se dice que un subconjunto no vacío S de un álgebra topológica A está constituido por divisores topológicos de cero si y sólo si existe una sucesión $\{z_n\} \subset A$ que cumple que $\|z_n\| = 1$ para toda n, tal que

$$\lim_n z_n f = 0,$$

para toda $f \in S$.

Definición 3.3

Un elemento $f \in A$, siendo A un álgebra topológica, se dice dominado por los elementos $g_1, ...g_n$ si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $h \in A$ se tiene

$$\|fh\| \leq c \sum_{i=1}^{n} \|g_i h\|.$$

En este caso suele escribirse $f < (g_1, ..., g_n)$.
Se dice que $f \in A$ es dominado por un ideal $I \subset A$ si $f < (g_1, ..., g_n)$ para alguna n-úpla de elementos de I. En este caso se escribe $f < I$.
Se dice que un ideal I posee la propiedad de dominación si la relación $f < I$ implica que $x \in I$.

Definición 3.4

Sea A un álgebra topológica. Se dice que un ideal $I \subset A$ puede ser separado de un elemento $x_0 \notin I$ si existe una sucesión $\{g_n\} \subset A$, tal que $g_n f \to 0$ para todo $f \in I$ y $g_n x_0 \nrightarrow 0$.
Se dice que dos ideales I_1 e I_2 pueden ser separados si uno de ellos puede ser separado de todos los elementos del otro.
Un ideal I tiene la propiedad de separación si puede ser separado de cualquier elemento $h \notin I$.

Teorema 3.2

El subespacio C_{V_p} de las funciones continuas de V_p es un ideal.

Demostración:
Sean $f \in C_{V_p}$ y $g \in V_p$. Sea además $t_0 \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario de $\mathbb{R}$ tal que $|t - t_0| < \delta$ para $\delta > 0$. Entonces

$$|(f * g)(t) - (f * g)(t_0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t - \tau) - f(t_0 - \tau)) dg(\tau) \right|$$

y como f es continua, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|t - t_0| < \delta$ se tiene $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$. Luego, se cumple

$$|(f * g)(t) - (f * g)(t_0)| \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dg(\tau).$$

Haciendo ahora

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dg(\tau)}{\varepsilon}$$

se demuestra la proposición. **Q.e.d.**

El ideal de las funciones absolutamente p-continuas tiene en el espacio de los ideales de V_p una estructura singular, los resultados siguientes verifican esta afirmación.

TEOREMA 3.3

C_p es un ideal formado por divisores topológicos de cero.

Demostración:
Sea $\{f^n\} \subset V_p$ la sucesión

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Es claro que $f^n \in V_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\|f^n\| = 1$. Sea ahora $g \in C_p$. Entonces

$$\begin{aligned}
(f^n * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(t-\tau)dg(\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)df^n(\tau) \\
&= \int_{0}^{1/n} g(t-\tau)df^n(\tau) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{n} g(t-\xi_i)[f^n(t_i) - f^n(t_i-1)],
\end{aligned}$$

donde los t_i son puntos de una partición del intervalo de integración y $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, \ldots, n$.

Si se toma $\xi_i = \tau_i$, es claro que el límite anterior es igual a $g(t) - g(t - \frac{1}{n})$ y si $n \to \infty$, como g es continua, se tiene que

$$(f^n * g)(t) \to 0,$$

lo cual demuestra la proposición. **Q.e.d.**

TEOREMA 3.4

Todos los elementos de V_p estan dominados por C_p.

Demostración:
Sea la función

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{n} \\ 1 + nt & -\frac{1}{n} \le t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} .$$

Se comprueba fácilmente que $g_n(t) \in C_p$ para todo n. Es claro que $(g_n * f)(t) \to f(t)$ cuando $n \to \infty$. De aquí que existe N tal que $(g_m * f)(t) = f(t)$ para todo $m > N$.

Sea ahora $f_0 \in V_p$ un elemento fijo arbitrario. Entonces

$$\|f_0 * g\|_p = \|g_{m_k} * g * f_0\|_p \qquad \text{si} \quad m_k > N,\ g \in V_p.$$

Considerando entonces para $n > N$ la n-úpla $(g_1, \ldots, g_n)$, para todo m tal que $N < m \le n$ se cumple que

$$\|f_0 * g\|_p \le \|g_m * g\|_p \|f_0\|_p.$$

Luego

$$\|f_0 * g\|_p \le \frac{\|f_0\|_p}{n - N} \sum_{m=N+1}^{n} \|g_m * g\|_p,$$

lo cual demuestra la proposición. **Q.e.d.**

Los dos siguientes teoremas se deducen de manera inmediata de resultados que aparecen en [19].

Teorema 3.5

C_{V_p} posee la propiedad de dominación y la propiedad de separación.

Demostración:
Este resultado es consecuencia inmediata del teorema 4.11 de [19], a partir de seleccionar $Z_\alpha = f^\alpha$. De aquí que, por el teorema 4.12 de [19], C_{V_p} tiene también la propiedad de separación **Q.e.d.**

Teorema 3.6

Para un elemento fijo $f \in V_p$, los ideales $I = \{g \in V_p;\ g * f = 0\}$ son de la forma

$$I = \bigcap \{M \in \mathfrak{L}(V_p);\ I \subset M\},$$

donde

$$\mathfrak{L}(V_p) = M_{V_p} \bigcap \check{I}(V_p),$$

tal que $\check{I}(V_p)$ es el conjunto de los ideales de V_p formados por divisores topológicos de cero.

Demostración:
Al ser V_p semisimple, este resultado es consecuencia inmediata de la proposición 4.38 de [19]. **Q.e.d.**

TEOREMA 3.7
Los únicos ideales maximales que no contienen a C_p son los M_s con $s \in \mathbb{R}$.

Demostración:
Sea $M \neq M_s$, tal que $M \not\supseteq C_p$. Sea también Φ_M el funcional asociado a M. Como $M \not\supseteq C_p$, existe $g \in C_p$ tal que $\Phi_M(g) \neq 0$. De aquí que

$$\Phi_s(g)\Phi_M(g) = \lambda_M \Phi_s(g), \quad \text{con} \;\; \lambda_M \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \lambda_M = \Phi_M(g).$$

Por otro lado, g es un divisor topológico de cero, por lo que $f^n * g \to 0$ cuando $n \to \infty$, (f^n se considera como en el teorema 3.3). Luego,

$$\Phi_s(g * f^n) = \Phi_s(f^n)\Phi_s(g).$$

Restando las dos últimas ecuaciones es

$$\Phi_s(g)\Phi_M(g) - \Phi_s(g * f^n) = \lambda_M \Phi_s(g) - \Phi_s(f^n)\Phi_s(g).$$

De aquí que

$$\Phi_s(\lambda_M g) = \Phi_s(g)[\Phi_s(\lambda_M \epsilon - f^n)],$$

y pasando al límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\Phi_s(\lambda_M g) = \Phi_s(\lambda_M g) - \Phi_s(g)\Phi_s(\text{lím}\, f^n).$$

Entonces es

$$\Phi_s(g)\Phi_s(\text{lím}\, f^n) = 0.$$

Por otro lado

$$\text{lím}\, f^n = H(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right. .$$

Como $\Phi_s(H(t)) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, lo cual se comprueba fácilmente, se tiene entonces que $\Phi_s(g) = 0$, de donde se deduce que si $g \in C_p$ y $g \notin M$, entonces $g \in M_s$ y por tanto, $C_p \setminus M \subset M_s$.

Se considera ahora el ideal generado por M y $C_p \setminus M$, o sea $\langle M, C_p \setminus M \rangle$, y se comprueba que no constituye toda el álgebra V_p, por lo que M no es maximal.

Si $\langle M, C_p \backslash M \rangle = V_p$, entonces $\epsilon \in \langle M, C_p \backslash M \rangle$ y puede escribirse como $\epsilon = \alpha m + \beta m_p$ tal que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m \in M$ y $m_p \in C_p \setminus M$. De aquí que

$$\epsilon - \alpha m = \beta m_p.$$

Multiplicando esta expresión por la conocida f^n es

$$(\epsilon - \alpha m) * f^n = \beta m_p * f^n.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que m_p es un divisor topológico de cero, se cumple que

$$(\epsilon - \alpha m) * H = 0; \qquad \lim f^n = H.$$

Luego,

$$H = \alpha m * H,$$

por lo que $\alpha m = \epsilon$. Pero como $m \in M$, entonces $\alpha m \in M$, lo cual contradice que M es un ideal maximal, quedando así demostrado el teorema. **Q.e.d.**

Este resultado ofrece una información de peso en la búsqueda de una caracterización del espacio de los ideales maximales de V_p. De él se deduce que una parte de los ideales de M_{V_p} son generados por la transformada de Fourier-Stieltjes, por lo que están totalmente caracterizados por ésta, mientras que los restantes ideales de M_{V_p} son los que contienen a C_p.

Finalizando este trabajo, queda aún abierto el problema sobre la descripción completa y rigurosa del espacio de ideales maximales del álgebra de las funciones de p-variación acotada.

Sin embargo, no resulta ocioso señalar que éste es un problema particularmente difícil, a partir de la dificultad de la cuestión análoga para el álgebra de las funciones de variación acotada, reflejada en la obra de Gelfand [4], donde se considera abierto el problema de la descripción general de los ideales maximales de V_1.

Esto también se muestra en el ejemplo que se describe a continuación (ver [3]):

Sea G un grupo abeliano localmente compacto, y $M(G)$ el espacio de Banach de las medidas de Baire sobre G, con la norma de la variación total.

La convolución $\mu * \nu$ de dos medidas μ, $\nu \in M(G)$ está definida sobre conjuntos de Baire E por

$$(\mu * \nu)(E) = \int_G \mu(E - x) d\nu(x).$$

Con la convolución como multiplicación, $M(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa. El álgebra $M(G)$ tiene como identidad a la masa puntual del grupo. La correspondencia $f \mapsto f d\sigma$ sumerge a $L^1(G)$ isométricamente como ideal cerrado en $M(G)$.

Respecto a este ejemplo plantea Gamelin:

"The maximal ideal space of $M(G)$ is horrible, unless G is discrete".

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

En esta tesis se ha aplicado la Teoría de Gelfand de las Álgebras de Banach al estudio del problema de la dualidad del espacio de las funciones de p-variación acotada. Para ello se generaliza la definición de los espacios de funciones de p-variación acotada y de funciones absolutamente p-continuas de [16] al caso de funciones complejas de variable real.

Entre las propiedades de los espacios V_p y C_p, aquí definidos, se destacan la demostración de que V_p es una álgebra de Banach conmutativa unitaria y semisimple y que C_p es un ideal de V_p compuesto por divisores topológicos del cero.

El resultado de mayor importancia en el segundo capítulo es el Teorema de Representación que permite indentificar al espacio dual de V_p con el espacio de las medidas regulares sobre el espacio M_{V_p} de ideales maximales de V_p a través de una integral de Lebesgue.

El no tener una caracterización adecuada del espacio M_{V_p} de ideales maximales de V_p conduce a la necesidad de su estudio en el tercer capítulo, donde se presentan algunos resultados sobre la estructura del espacio de ideales de V_p y se caracteriza parcialmente al espacio M_{V_p}, clasificando a sus elementos como los ideales generados por la transformada de Fourier-Stieltjes (totalmente caracterizados por ella) y los ideales que contienen a C_p. En este punto se comenta la dificultad de obtener una caracterización completa del espacio de ideales maximales de V_p.

RECOMENDACIONES

En [3] se define la topología "envoltura-núcleo" (hull-kernel) sobre el espacio de ideales maximales de un álgebra de Banach conmutativa y unitaria y se estudia su relación con la topología de Gelfand. Resulta sencillo comprobar que el conjunto de los ideales M_s es denso en M_{V_p} con la topología "envoltura-núcleo". Esto indica como línea de trabajo futura el estudio de propiedades similares en la topología de Gelfand, lo cual podría contribuir a la caracterización del espacio de ideales maximales de V_p.

También resultaría de interés, tanto por su valor analítico intrínseco, como por su posible aplicación práctica, el estudio de la teoría espectral en estos espacios.

Igualmente se podría generalizar el estudio al caso de operadores en espacios de Banach.

Bibliografía

[1] A. Bolder: *Introduction to Function Algebras,* Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1969).

[2] N. Bourbaki: *Elements of mathematics. Théories Spectral*, Addison-Wesley, New York, (1967).

[3] T.W. Gamelin: *Uniform Algebras*, Chelsea, 2. edición, (1984).

[4] I.M. Gelfand: *Collected Papers I*, Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1987).

[5] I.M. Gelfand, D.A Raikov, G.E Chilov: *Les Anneaux Normés Conmutatifs*, Gauthier-Villars, París, (1982).

[6] K. Hoffman: *Fundamental of Banach Algebras*, Massachusetts Institute of Technology, USA, (1962).

[7] M.A. Jiménez Pozo: *Medida, Integración y Funcionales*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, (1989).

[8] S.V. Kisliakov: A Remark on the Space of functions of bounded p-Variation. *En: Mathematische Nachrichten,* **119,** Berlín, (1984), (preprint).

[9] A.N. Kolmogorov, S:V: Fomin: *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial MIR, Moscú, (1978).

[10] W. Lynn H. Loomis: *Harmonic Analysis*, The University Series in Higher Mathematics, Harvard University, D. Van Nostrana Company, USA, (1953).

[11] E.R Love, L.C. Young: Sur une Classe de fonctionelles lineaires. *En: Fundamenta Mathematica,* **28,** Warszawa, (1937).

[12] J. Molk: *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées,* Ed. Jacques Gabay, París, (1916).

[13] G. Musielack, W. Orlicz: On generalized Variations (1). *En: Studia Mathematica,* **18,** Warszawa, (1959).

[14] M.A Naimark: *Normed Rings*, Lomonosov State University, Moscú, (1959).

[15] Y. Puig de Dios: *Espacios de funciones de p-variación acotada fuerte y débil,* Tesis de Licenciatura, Universidad de La Habana, (2005).

[16] R.A. Roldán Inguanzo: *Räume von Folgen und Funktiones von bescränkter p-variation,* Tesis de Doctorado, Universidad Friedrich Schiller de Jena, RDA, (1989).

[17] C. Sánchez Fernández, C. Valdés Castro: *De los Bernoulli a los Bourbaki,* Ed. Nivola, España, (2004).

[18] L.C. Young: An Inequality of the Hölder Type, connected with Stieltjes Integration. *En: Acta Mathematica,* **67,** Uppsala, (1936).

[19] W. Zelasko: *On Ideal Theory in Banach and Topological Algebras*, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa (1984).