**Séries Numéricas. Sistema de Exercícios para favorecer a aprendizagem. Exercícios resolvidos e propostos.**

**AUTORES:**

**Bartolomeu Chindumbo Delfino,** Lic., Instituto Superior de Ciências da Educação do Huambo – Angola - Doutorando em Ciências Pedagógicas na Universidade Henriques José Varona. chindumbo27h@yahoo.com.br

**José Cruz Bumba**, Lic. Instituto Superior de Ciências da Educação do Huambo – Angola.

**RESUMO**:

Através da aplicação de diferentes instrumentos de investigação, se constatou que existem insuficiências por partes dos estudantes do 1º Ano do Instituto Superior de Ciências de Educação (ISCED) no Huambo - Angola, na cadeira de Análise Matemática I no tema Series Numéricas, especificamente em conteúdos ligados a procedimento determinação do seu carácter. Com o intuito de superar essas dificuldades, elaborou –se a presente obra com sugestões metodológicas para Determinar com um grau de complexidade maior, e variados exemplos ilustrativos. Essas orientações servirão de consulta para professores e alunos, e contribuirá na minimização das dificuldades na resolução do problema diagnosticado.

Palavras - chaves: Serie Numérica, exercícios, ensino e aprendizagem.

## INTRODUÇÃO

O ser social do homem é uma característica que leva-o a criar laços e estabelecer relações com outros homens. Pelo facto de estar inserido num determinado meio social, a participação do homem no processo de crescimento e desenvolvimento da sociedade é necessária.

A participação activa e eficiente na realização da sociedade, resulta, fundamentalmente, de um processo de preparação do homem em diferentes facetas de sua personalidade, daí a relevância que a educação tem nas sociedades, como processo capaz de garantir à sociedade cidadãos aptos a solucionar as diversas problemáticas que se apresentam.

As necessidades que uma sociedade expõe, são a fonte de concepção de políticas educativas, que visam formar os cidadãos para a sua satisfação, daí que este seja um factor que por exemplo distinga uma sociedade de outras.

Evidentemente que as sociedades são dinâmicas, e este carácter proporciona a educação múltiplos desafios.

Em um relatório para a UNESCO da comissão Internacional sobre Educação para o século XXI, com o título “Educação um tesouro a descobrir”, Delors, J. considera que “ …a educação deve transmitir de forma maciça e eficaz, cada vez mais saberes e saber-fazer evolutivos, adaptados à civilização cognitiva, pois são as bases das competências do futuro. À educação cabe fornecer, de algum modo, os mapas de um mundo complexo e constantemente agitado e, ao mesmo tempo, a bússola que permita navegar através dele”.

No sentido de poder dar resposta as missões que lhe são incumbidas, considera o autor antes aludido que a educação deve organizar-se considerando quatro aprendizagens fundamentais, a que o mesmo designou por “pilares do conhecimento”:

- Aprender a conhecer - isto é adquirir os instrumentos da compreensão;
- Aprender a fazer – para poder agir sobre o meio envolvente;
- Aprender a viver juntos – a fim de participar e cooperar com os outros em todas as actividades humanas;
- Aprender a ser – via essencial que integra os três precedentes.

Segundo a Lei de bases do sistema de educação (2001), “ a educação constitui um processo que visa preparar o indivíduo para as exigências da vida política, económica e social do país e que se desenvolve na convivência humana, no círculo familiar, nas relações de trabalho, nas instituições de investigação científico - técnica, nos órgãos de comunicação social, nas organizações comunitárias, organizações filantrópicas e religiosas e através de manifestações culturais e gimno - desportivas”.

Relativamente ao subsistema de formação de professores a lei de bases estabelece como objectivos:

- Formar professores com o perfil necessário à materialização integral dos objectivos gerais da educação;
- Formar professores com sólidos conhecimentos científico-técnicos e uma profunda consciência patriótica de modo a que assumam com responsabilidade a tarefa de educar as novas gerações;

- Desenvolver acções de permanente actualização e aperfeiçoamento dos agentes de educação.

A necessidade de melhorar constantemente a qualidade do processo de ensino-aprendizagem, permite a que os profissionais que diariamente intervêm ou actuam nesta esfera da actividade humana possam, portanto, depreender o modo como o mesmo se efectiva, o contexto sobre o qual se está a realizar, as dificuldades ou situações problemáticas que daí advêm, as vantagens ou desvantagens da forma como se conduz este processo, para então traçar estratégias ou investigar formas cada vez mais eficazes de o realizar, no sentido de proporcionar ao estudante uma formação com elevado grau de qualidade.

No currículo de Ensino da Matemática, no Instituto Superior de Ciências de Educação do Huambo (ISCED – Huambo), destaca-se de entre as várias disciplinas, a Análise Matemática I, sendo ministrada no 1º semestre do 1º ano.

Entre as temáticas que constam do programa da disciplina Análise Matemática I, considera-se neste caso as séries numéricas, que na perspectiva do autor desta obra, o conteúdo das séries numéricas é pertinente uma vez que, favorece, de forma considerável, a construção de um raciocínio fundamentado em princípios lógicos, assim como de maneira muito particular, no desenvolvimento de habilidades e hábitos, facto que possibilita ao estudante uma melhor abordagem das situações sob as quais é submetido, tanto num ambiente escolar ou fora deste.

Conhecendo a realidade do processo de ensino-aprendizagem da Análise Matemática I e II, durante a experiência do autor enquanto monitor das disciplinas, associando as observações as aulas, os resultados das avaliações e algumas aulas ministradas, levaram as seguintes situações problemáticas:

- Insuficientes bases de conhecimentos precedentes apresentados pelos estudantes;
- Inadequada interpretação dos conceitos básicos das séries numéricas;

- Pouca criatividade dos estudantes, e dificuldade na organização do processo de resolução de exercícios referente as séries numéricas, assim como uma incorrecta utilização de procedimentos de resolução
- Maior predominância de métodos reprodutivos;
- Pouco tempo para estimular a criatividade dos estudantes, através do estudo das séries numéricas;

Em virtude das situações expostas anteriormente, levantou-se o seguinte problema científico:

Como favorecer o processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas nos estudantes do primeiro ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED-Huambo?

**Objecto de estudo:** O processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas.

**Campo de acção:** O processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas, nos estudantes do primeiro ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED-Huambo.

Propõe-se como **ideia a defender:** A elaboração de um sistema de exercícios de séries numéricas, com orientações metodológicas para a sua resolução, pode favorecer a aprendizagem dos estudantes do primeiro ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED- Huambo.

**Objectivo Geral:** Sugerir um sistema de exercícios, com algumas orientações metodológicas para a sua resolução, na temática séries numéricas para os estudantes do primeiro ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED-Huambo.

**Objectivos Específicos**

- Fundamentar desde o ponto de vista teórico o processo de ensino – aprendizagem;
- Diagnosticar o estado actual do processo de ensino-aprendizagem da temática séries numéricas no ISCED-Huambo;
- Elaborar um sistema de exercícios de séries numéricas com algumas orientações metodológicas para a sua resolução.

Utilizaram-se métodos teóricos e empíricos:

**Teóricos**

- **Análise-Síntese:** Para processar a informação consultada, analisar e sintetizar a bibliografia que foi utilizada na fundamentação teórica.
- **Histórico-Lógico:** Utilizou-se para o estudo dos antecedentes históricos acerca do processo de ensino-aprendizagem de modo geral.
- **Indução-Dedução:** Para inferir as especificidades da temática séries numéricas, partindo das particularidades do objecto em estudo e consequentemente chegar as conclusões e recomendações.

**Empíricos**

- **Inquérito:** Para diagnosticar a situação actual do objecto em estudo, e o nível de preparação dos estudantes no estudo das séries numéricas.
- **Observação:** Observaram-se as aulas de Análise Matemática do primeiro ano do curso de matemática, com a finalidade de recolher informações sobre o objecto de estudo, assim como averiguar o nível de desenvolvimento.
- **Análise documental:** Para a análise de documentos normativos e currículos relacionados ao tema em abordagem.

**Métodos Estatísticos e Matemáticos:**

**Estatística Inferencial:** Para tabular e graficar os dados recolhidos do diagnóstico realizado.

**População e Amostra:** A população em estudo, consiste nos estudantes do primeiro ano, tanto do período regular e pós-laboral, da especialidade de Ensino da Matemática, do ISCED-Huambo e a amostra é constituída de 38 estudantes tanto do regular como do pós-laboral.

**Tipo de Investigação:** Descritiva, que permite observar, descrever ou mesmo analisar os factos ou fenómenos sem que estes sejam manipulados, mediante a representação de tabelas e gráficos.

**Modelo de Investigação:**

**Tipo de Amostragem:** Amostragem Aleatória

**Aporte prático**

O aporte pratico deste trabalho, revela-se no sistema de exercícios com orientações metodológicas para sua resolução, destinado aos estudantes do primeiro ano do curso de Ensino da Matemática do ISCED - Huambo.

**Estrutura do trabalho**

Além desta introdução, o trabalho compreende dois capítulos, conclusões e recomendações. No primeiro capítulo apresenta-se algumas considerações gerais acerca do processo de ensino-aprendizagem, culminando com uma descrição acerca do processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas no ISCED-Huambo. No segundo capítulo, para além da análise dos resultados dos instrumentos, dá-se uma introdução ao estudo das séries numéricas, culminando com as orientações metodológicas e a proposta de exercícios.

## CAPÍTULO 1 - O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DAS SÉRIES NUMÉRICAS

Neste capítulo, serão abordadas, a prior, algumas concepções sobre o processo de ensino-aprendizagem de um modo geral, para a posterior caracterização do processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas, no ISCED-Huambo.

Reflectir o processo de ensino-aprendizagem implica, também, uma análise do que é? Como se processa? E qual é a sua finalidade. Neste sentido, de modo sucinto, apresentar-se-ão algumas concepções que tendem a clarificar as questões consideradas.

A abordagem do processo de ensino-aprendizagem será feita, considerando numa primeira fase as componentes de ensino e de aprendizagem de forma independente. Na sequência apresentar-se-á uma abordagem envolvendo ambos processos como um todo.

O processo de ensino-aprendizagem envolve, de modo claro, as vertentes de ensino e de aprendizagem. Ensino e aprendizagem são termos que descrevem o papel ou a função de duas ou mais pessoas numa mesma actividade, a qual favorece o intercâmbio entre estas pessoas, de modo que enquanto alguns ensinam outros aprendem.

Conforme Piletti, C. (2004), o ensino e aprendizagem são tão antigos quanto a própria humanidade, sendo que nas tribos primitivas os filhos aprendiam com os pais a atender suas necessidades, superar as adversidades do clima, bem como a desenvolver-se na arte da caça. Com o passar do tempo muitas pessoas começaram a dedicar-se exclusivamente ao ensino, dada a importância que esta tarefa foi adquirindo, facto que permitiu o surgimento de instituições voltadas a tarefas deste género, como por exemplo as escolas.

Entretanto, tal como fundamenta Meksenas, P. (2003) "a escola que conhecemos hoje é, portanto, produto dos séculos XVIII e XIX, período em que aparece a ideia da necessidade de educação pública e obrigatória para todas as pessoas. Já em 1619 encontramos na Alemanha, Escócia e Holanda uma educação que se dava através de escolas garantidas pelo estado para crianças de 6 a 12 anos. Será, porém, a partir da Revolução Francesa, em 1789, que se expande por toda a Europa e América a necessidade de instaurar o ensino público e científico para todos".

Portanto o ensino e a aprendizagem são processos que dão-se em diferentes momentos e circunstâncias. Assim sendo, convém explicitar, que as situações de ensino e de aprendizagem que se materializam a nível do contexto escolar é que constituem, mormente, o foco de análise neste trabalho.

### 1.2 Concepções acerca do ensino

Nesta secção procurou-se destacar algumas concepções acerca do processo de ensino.

A concepção de ensino, evidentemente, não sempre foi a mesma, pelo que desde os primeiros conceitos até as novas abordagens, muitas são as inovações que vão surgindo.

Para Libâneo, J. C. (1990), pode-se definir processo de ensino como "uma sequência de actividades do professor e dos alunos, tendo em vista a assimilação de conhecimentos e desenvolvimento de habilidades, através dos quais os alunos aprimoram capacidades cognitivas (pensamento independente, observação, análise-síntese…)".

Na concepção de Freire, P. (1996), ensinar não traduz-se apenas no acto de transmitir conhecimentos, pelo contrário, é pois a forma ou a via pela qual criam-se as possibilidades para a produção ou construção do conhecimento.

Segundo o Dicionário Michaelis (1998), ensinar é um verbo transitivo directo, de origem latina (insignare), tendo uma diversidade de significados, entre os quais destacamos:

- ✓ Educar;
- ✓ Instruir sobre;
- ✓ Habituar a fazer alguma coisa;
- ✓ Em termos psicológicos é oferecer condições para que alguém aprenda.

Deste modo, conforme a referência acima citada, o ensino traduz-se como a forma sistemática normal de transmitir conhecimentos, particularmente nas escolas, sendo um dos principais meios de educação.

Não obstante, Zilberstein, J. (2000) considera que o ensino é o processo de organização da actividade cognoscitiva dos alunos.

Segundo Kubo, O. M. e Botomé, S. P. (2001) ensinar reflecte a relação entre o que o professor faz e a efectiva aprendizagem do aluno, de modo que somente se afirma que houve ensino quando de facto o aluno aprendeu.

Lebrun, M. (2002) citando Brown, G., e Atkins, M. enfatiza que o ensino pode ser visto como a disponibilização ao estudante de ocasiões em que pode aprender. Trata-se de um processo interactivo e de uma actividade intencional. Os fins do mesmo (ensino) podem ser ganhos nos conhecimentos, um aprofundar da compreensão, o desenvolvimento de competências na resolução de problemas ou ainda alterações nas percepções, nas atitudes, nos valores e no comportamento.

Para Garcia, P. A. (2003) o termo ensinar tem uma equivalência com o acto de mostrar, indicar, colocar na frente, e fornecer direcção.

Ao abordar o ensino, Piletti, C. (2004) apresenta três concepções, as quais diferenciando-se, de certa maneira, pela função dos protagonistas no processo em questão:

- Concepção tradicional de ensino, onde a iniciativa cabe ao professor que é, ao mesmo tempo, o sujeito do processo, o elemento decisivo e decisório no ensino. A questão pedagógica central é aprender.

- Concepção de ensino da escola nova, na qual a iniciativa desloca-se para o aluno e o centro da acção educativa situa-se na relação professor - aluno. A questão pedagógica central é aprender a aprender.

- Concepção tecnicista de ensino, em que o elemento principal passa a ser a organização racional dos meios, e o professor e o aluno ocupam posição secundária. A questão pedagógica fundamental é aprender a fazer.

Boeri, C. N. (2009) salienta que ensinar não é transferir conhecimentos, mas é sim proporcionar condições para a construção dos conhecimentos pelos alunos, de forma crítica, consciente, estimulando a autonomia, a reflexão, a discussão e o raciocínio.

Da sistematização apresentada anteriormente, relativamente ao ensino, constata-se que o ensino pode ser visto sob vários ângulos ou que existem várias perspectivas deste processo. Contudo, convenciona-se referir que as concepções de ensino não se esgotam aqui nos autores aludidos, pelo que, das perspectivas apresentadas pensa-se que Lebrun, M. clarifica, de certa maneira, a essência do processo de ensino, na medida em que o ensino apresenta-se como mola impulsionadora do processo de aprendizagem.

### 1.3 Concepções acerca da aprendizagem

Na sequência são apresentadas algumas considerações, relativas à aprendizagem.

Na perspectiva de Libâneo, J. C. (1990) a aprendizagem traduz-se num processo de assimilação de determinados conhecimentos e modos de acção física e mental, organizados e orientados no processo de ensino, de modo que os resultados deste processo se repercutam em modificações na actividade externa e interna do homem, a quando da sua relação como ambiente físico e social.

Segundo o Dicionário Michaelis (1998), aprender é um verbo transitivo directo, indirecto, de origem latina (apprehendere), o qual pode significar:

- ✓ Ficar sabendo;
- ✓ Reter na memória;
- ✓ Tomar conhecimento de, Ex: em pouco tempo, aprendeu vários idiomas
- ✓ Em termos Psicológicos, é denominação geral dada a mudanças permanentes de comportamento como resultado de treino ou experiência anterior; processo pelo qual se adquirem essas mudanças.

Neste sentido, a aprendizagem traduz-se como a acção de aprender qualquer ofício, arte ou ciência.

Não obstante, Zilberstein, J. T. (2000) alega que a aprendizagem é um processo em que participa activamente o aluno, dirigido pelo docente, apropriando-se o primeiro de conhecimentos, habilidades e capacidades, em comunicação com os outros em um processo de socialização que favorece a formação de valores.

Lebrun, M. (2002), considera que a aprendizagem pode ser vista como um processo activo e construtivo através do qual o aluno manipula estrategicamente os recursos cognitivos disponíveis de maneira a criar novos conhecimentos ao extrair a informação do meio e ao integra-la na sua estrutura informativa já presente na memória.

Na perspectiva de Piletti, C. (2004), a aprendizagem é um fenómeno e um processo bastante complexo, o qual não pode reduzir-se, apenas, a aquisição de conhecimentos, conteúdos ou informações. Mais do que a simples aquisição de conhecimentos, conteúdos ou informações, torna-se imprescindível um processamento sobremaneira complexo destas informações, de modo a que se convertam em informações significativas para a vida das pessoas.

Triana, I. M e Triana, A. C. M. enfatizam que aprender é um processo de construção e reconstrução de saberes sobre objectos, e fenómenos por parte do sujeito que aprende, ao adquirir não só conhecimentos, mas também formas de comportamento, atitudes, valores, tudo em correspondência com experiências, motivações, interesses, assim como o contexto sócio - cultural.

Dos argumentos teóricos anteriormente expostos depreende-se, que a aprendizagem é um processo extremamente complexo, efectivando-se a nível da estrutura cognitiva do aluno. Tal processo pode ser abordado sob diferentes e muitos pontos de vista, todavia convenciona-se explicitar que foge do foco deste trabalho um tratamento, mais aprofundado, desta temática.

Considerando que o ensino é dirigido pelo professor visando uma melhor aprendizagem do estudante, então estes dois processos constituem a unidade que traduz-se no processo de ensino-aprendizagem.

### 1.4 Processo de ensino-aprendizagem

Não se pode reduzir o processo em análise, simplesmente ao papel desempenhado pelo professor, nem tão pouco desdenhar o ingente trabalho desenvolvido por ele, dando apenas maior relevância ao estudante, pensa-se que a participação tanto dos docentes, estudantes e outras pessoas é um facto.

Todavia a forma como os intervenientes deste processo tendem e devem participar é que traduz-se na chave para o seu gradual progresso, dai que um factor essencial é, pois, o estabelecimento de uma concatenação entre as actividades desenvolvidas pelos protagonistas, visando uma melhor aprendizagem ao estudante, ou seja, criar condições para que a experiência vivida por ambos seja a mais satisfatória e agradável possível.

Destaca-se assim, a grande e indubitável correspondência entre os processos de ensino e aprendizagem na medida em que, se por um lado a aprendizagem ocorre a nível da estrutura cognitiva do aprendiz, então hipoteticamente, podendo e estudando o modo como ela se efectiva, levar-nos-á a uma teoria de aprendizagem, e consequentemente ter-se-á uma teoria de ensino, que se baseia nas condições sob as quais as pessoas tendem a aprender.

Para Moreira, M. A (1988) embora as teorias de aprendizagem sejam vistas até com desdém por alguns professores, sua prática docente é fortemente influenciada por tais teorias. O professor que simplesmente ignorar o domínio teórico da acção docente estará trabalhando na base do ensaio-e-erro, seguindo modismos, imitando colegas, usando textos e outros materiais instrucionais sem saber qual orientação teórica está por detrás desses materiais.

O autor, citado anteriormente, considera ainda que a actividade docente, ao contrário, deve ser conduzida sob um referencial teórico acerca de ensino, coerente com pressupostos teóricos acerca de aprendizagem e de como é produzido o conhecimento humano.

Na perspectiva de Addine, F. F., et al (1998), o processo de ensino-aprendizagem conforma uma unidade que tem como propósito essencial contribuir para a formação integral da personalidade do estudante. Sendo esta uma responsabilidade social de cada país. O processo de ensino – aprendizagem é a integração do instrutivo e do educativo.

Assim, o instrutivo é o "processo e resultado de formar homens capazes e inteligentes. O homem é capaz quando pode enfrentar e resolver os problemas que se apresentam, para se tornar capaz deve desenvolver sua inteligência ", de modo que segundo Alvarez, C. citado por Addine, F. F. (1998) tal inteligência se alcança mediante a utilização repetida da lógica da actividade científica.

Noutra vertente, o educativo se logra "com a formação de valores, sentimentos que identificam o homem como um ser social, também inclui o desenvolvimento de crenças, o carácter e outros elementos da esfera volitiva e emocional que em conjunto com a cognitiva permitem falar de um processo de ensino-aprendizagem que visa à formação multilateral da personalidade do homem ".

Segundo Zilberstein, J. T. (2000) o processo de ensino-aprendizagem constitui a via essencial para a apropriação dos conhecimentos, habilidades, hábitos, normas de relacionamento, de comportamento e valores legados pela humanidade, expressos em conteúdos de ensino, em estreita ligação com o resto das actividades docentes e extra - docentes que realizam os estudantes.

Para o autor destacado no parágrafo precedente o processo de ensino-aprendizagem deve formar personalidades que buscam o conhecimento e o apliquem com carácter criativo para o benefício dos homens, que conheçam a si mesmos e aprendam como auto-regular-se; que sentem, amem e respeitem os seus semelhantes; que se expressam livremente e com conhecimento de causa do que eles dizem e fazem.

Enfatizam Kubo, O. M. e Botomé, S. P. (2001) que ensinar e aprender traduzem dois comportamentos, atribuídos ao professor e ao aluno respectivamente, neste sentido consideram que o processo de ensino-aprendizagem é o nome atribuído a um sistema complexo de interacções comportamentais entre professores e alunos, sendo que tal processo pode ser claramente explicitado pela análise destes comportamentos que nele se manifestam.

O processo de ensino-aprendizagem, na óptica dos autores Triana, I. M e Triana, A. C. M., traduz-se num fenómeno universal requerido para a continuidade cultural, através do qual uma geração prepara a outra que lhe sucede. Neste sentido sua finalidade consubstancia-se, portanto, na produção de uma mudança, a qual vai desde a ignorância ao saber, de reconstruir novos conhecimentos a partir do previamente conhecido.

Se o processo de ensino-aprendizagem perspectiva o alcance de certos resultados, os quais quanto mais satisfatórios melhor, então faz-se necessário considerar, por exemplo, o aspecto motivação, que vai influir sobremaneira no alcance dos resultados que se almejam.

### 1.5 Processo de ensino-aprendizagem e Motivação

A aprendizagem como processo que se desenvolve a nível da estrutura cognitiva do aluno está intimamente concatenada, por exemplo, à motivação do mesmo. De modo que o bom estado anímico do aluno na sala de aula, converte-se em condição necessária para que o processo em questão seja o mais produtivo possível. Daqui deduz-se claramente uma das grandes tarefas do professor, como agente capaz de assegurar um ambiente de aprendizagem cada vez mais harmónico, convidativo ou agradável aos alunos.

Neste sentido pensa-se, também, que uma das enormes responsabilidades das instituições de formação de professores traduz-se, portanto, na possibilidade de formar profissionais comprometidos com a necessidade de cada vez mais, mediante suas acções, poderem contribuir para o engrandecimento deste processo tão complexo, todavia tão necessário para a permanência da cultura humana em termos gerais.

Segundo Lebrun, M. (2002), o que vai ser aprendido, a quantidade bem como a qualidade do que vai ser aprendido, é grandemente influenciado ou determinado pela motivação do aluno, por sua vez, a motivação vê-se influída pelo estado emocional, as crenças, os interesses e os objectivos, assim como pelos hábitos de estudo, ou seja o aspecto afectivo tem implicações na motivação.

Para Piletti, C. (2004), a motivação consiste em apresentar a alguém estímulos que lhe favoreçam determinado tipo de conduta, sendo que em sentido didáctico, consiste em oferecer ao aluno os estímulos apropriados para tornar a aprendizagem mais eficaz.

Considera o autor citado, que tanto os recursos didácticos, os procedimentos de ensino, o conteúdo as actividades práticas e “exercícios” são valiosas fontes de incentivo, entretanto, a personalidade do professor é que vai destacar-se como a maior fonte de motivação.

Independentemente das condições materiais ou físicas que estejam criadas, não se pode descurar, portanto, o estado emocional ou mesmo psicológico de quem tem a responsabilidade de conduzir um processo, que perspectiva o desenvolvimento das qualidades humanas dos alunos.

O anterior remete-nos para uma constatação, de que a motivação não se centra apenas no aluno, mas que numa mesma proporção é um incremento crucial no trabalho que será desenvolvido pelo professor, na medida em que faz-se necessária uma predisposição do professor para exercer devidamente a sua actividade. Com isto, pretende-se explicitar que no processo de ensino-aprendizagem a motivação tem de ser não unilateral, mas sim bilateral.

Com efeito, considerando os aspectos até então descritos, pensa-se, por exemplo, que favorecer o processo de ensino-aprendizagem é criar condições, investigar métodos, gizar estratégias para que a relação professor-aluno na sala de aula e não só, seja uma relação de harmonia, de bem-estar, de troca de experiências e mesmo tempo de aprendizagem mútua, pois que, se a aprendizagem ocorrer estaremos convictos de que o trabalho do professor foi realmente cumprido com grande êxito.

Em virtude do tema em investigação, o qual estando relacionado com um sistema de exercícios, convenciona-se apresentar alguns pressupostos teóricos sobre exercícios.

**1.6 Concepções sobre exercícios**

No processo de ensino-aprendizagem da matemática, fundamentalmente, a resolução de exercícios converte-se, de certa forma, na via capaz de assegurar a que os alunos consigam aprender de modo mais efectivo, na medida em que vai possibilitar a consolidação de conteúdos.

Ballester, S. (1995) considera que a resolução de exercícios e problemas é uma via fundamental para realizar o ensino da matemática, facto que faz com que os professores conheçam as formas efectivas de explorar ao máximo as possibilidades que tais exercícios e problemas proporcionam, para contribuir ao desenvolvimento de habilidades e hábitos, desenvolvimento do pensamento e a educação dos alunos. "… com a exercitação dá-se um importante contributo ao cumprimento dos objectivos do ensino da matemática…"

O autor Milián, M. H. J. (2013), define exercício como aquela exigência para actuar, onde a via de solução é conhecida pelo estudante. Com esta noção de exercício, considerando o elemento via de solução, o autor enfatiza que um problema no ensino-aprendizagem da Análise Matemática é aquela exigência para actuar cuja via de solução é desconhecida pelo estudante, o qual possui os saberes relativos a exigência ou é capaz de construí-los a partir da situação inicial, para resolve-lo e que esteja motivado para isto.

O autor antes aludido, considera que uma das funções fundamentais dos exercícios é a fixação dos conhecimentos e o desenvolvimento de habilidades e hábitos. De modo que umas das suas características fundamentais é que dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam a sua solução.

### 1.6.1 Classificação dos exercícios

Os exercícios no contexto da matemática podem assumir classificações diversificadas, deste modo, segundo Ballester, S. (1995), “ de acordo com o objectivo didáctico com que se utiliza, os exercícios podem ser classificados nos seguintes tipos”:

- Exercícios para a introdução de novos conhecimentos;
- Exercícios para o desenvolvimento de habilidades e hábitos;
- Exercícios para desenvolver o pensamento dos estudantes;
- Exercícios para o controlo.

Dos tipos de exercícios anteriormente enunciados, o autor Milián, M. H. J. (2013) inclui os “exercícios em função de eliminar as debilidades detectadas no diagnóstico (precedência, cálculo, compreensão, linguagem, abstracção, ilustração, etc.) ”.

Pensa-se que os exercícios são de grande importância, na medida em que levam os estudantes a consolidarem, individual e colectivamente, um conjunto de conhecimentos que apresentam-se de modo relativamente abstracto, e que sem eles, de alguma forma, torna-se difícil chegar a sua essência. Os exercícios concebidos assim têm um carácter impulsionador. Por outro lado, possibilitam elevar o espírito de solidariedade, responsabilidade, crítico.

Contudo, a selecção dos exercícios converte-se numa tarefa de enorme responsabilidade para o dirigente do processo, o qual deve ter em consideração um conjunto de condições que favorecerão uma selecção mais adequada.

Segundo Ballester, S. (1995), relativamente ao factor “selecção de exercícios”, deve-se ter em conta:

a) As habilidades ou hábitos fundamentais a desenvolver de acordo com objectivos concretos do ensino (de cálculo, de construção, de demonstração, de investigação, etc.);
b) A actividade mental que devem desenvolver os “alunos” no processo de solução.

Se por um lado os exercícios são ferramenta essencial para a materialização dos objectivos de ensino-aprendizagem, por outro lado faz-se necessária uma abordagem, relativamente aos procedimentos de resolução que, de certa forma, contribuem a que a resolução de tais exercícios seja a mais apropriada.

Neste sentido, apresenta-se na sequência uma classificação dada por Ballester, S. (1995), segundo o qual os procedimentos de solução podem ser:

- Algorítmicos;
- Heurísticos.

Com efeito, ambos procedimentos têm em comum o facto de serem aplicados na resolução de exercícios e problemas de diversos tipos. De modo que a diferença essencial assenta-se em que se para uma determinada classe de exercícios se conhece um algoritmo de solução, então todo exercício desta classe se pode resolver mediante a aplicação de dito algoritmo (considerando desta forma os procedimentos algorítmicos).

Por outro lado, se para um exercício não se dispõe de nenhum algoritmo de solução (porque não existe ou não se conhece), então há que determinar uma via de solução apropriada, daí a relevância da heurística.

## 1.7 O processo de ensino-aprendizagem das Séries Numéricas no ISCED-Huambo

Nesta secção do trabalho apresenta-se uma descrição do estado actual acerca do processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas no ISCED – Huambo.

Importa antes considerar que o processo de ensino-aprendizagem de qualquer disciplina, de modo geral, visa o alcance de objectivos. Ballester, S. (1995) considera que, um dos objectivos do ensino da Matemática assenta-se no campo do saber e do poder, de maneiras que a aquisição por parte dos alunos de um saber e poder sólidos constitui a base para a formação matemática futura e um instrumento intelectual para solucionar os vários problemas que se apresentam na vida, diante do relacionado com a ciência, a técnica, os serviços e a produção.

Ora, a nível da formação superior de professores, na especialidade de ensino da matemática, tal como já exposto na introdução do trabalho, existe no currículo dessa especialidade a disciplina Análise Matemática I, a qual tem as séries numéricas como um dos objectos de estudo, pelo menos em termos programáticos.

Entretanto, apesar do tema constar do programa, da experiência do autor enquanto estudante do primeiro ano, associada as informações obtidas ao longo da investigação, verificou-se que dificilmente ou quase nunca de abordava as séries numéricas, pelo menos até o ano de 2014.

Este facto suscitou a necessidade de considerarmos as razões que, de certa maneira, influíram a que as séries numéricas não fossem estudadas, uma vez que, é consentânea a ideia segundo a qual, o estudo das séries numéricas é essencial para a formação dos professore de matemática.

Algumas das razões que foram consideradas a quando do processo de investigação, destaca:

- Insuficiência de material bibliográfico;
- A falta de orientações metodológicas por parte dos docentes para a transmissão dos conteúdos afectos as séries numéricas;
- Pouca carga horária da disciplina Análise Matemática I.

Actualmente, em função da grande disponibilidade de livros e uma certa facilidade em termos de acesso a internet e outras fontes de informação, de alguma forma vem contribuir positivamente para o processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas de modo muito particular.

Dado que o conteúdo das séries numéricas proporciona, também um crescimento cognitivo abstracto aos estudantes, criou-se algumas condições materiais e metodológicas, para que fosse possível a abordagem deste tema, no ISCED-Huambo, facto que se consumou no ano de 2015, mais concretamente na disciplina de Análise Matemática II, como forma de garantir um elevado grau de conhecimento aos professores de matemática.

E pelas situações problemáticas consideradas na introdução surgiu, então, a necessidade de realizar esta investigação, que tem por escopo sugerir um sistema de exercícios, visando favorecer, de alguma forma, o processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas.

## CAPÍTULO 2 - PROPOSTA DE UM SISTEMA DE EXERCÍCIOS SOBRE SÉRIES NUMÉRICAS

Contribuir para a supressão de algumas deficiências evidenciadas no processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas, nos estudantes do primeiro ano, do ISCED-Huambo, constitui o cerne neste trabalho, e neste sentido, para esta secção faremos, em primeiro lugar, a apresentação dos dados recolhidos no processo de investigação, seguindo com a apresentação do sistema de exercícios, com as orientações metodológicas para auxiliar na resolução.

### 2.1 Análise dos resultados aplicados aos professores

No que concerne aos professores, considerou-se como população os professores do Sector de Matemática do Departamento de Ciências Exactas, tendo como amostra, professores das disciplinas de Análise Matemática, no caso 3 professores.

**Pergunta 1.** O professor planifica as aulas em função de cada conteúdo?

**Tabela 1. Planificação das aulas**

| **Alternativas** | **Quantidade de professores** |
|---|---|
| **Sempre** | 3 |
| **Nem sempre** | 0 |
| **Nunca** | 0 |
| **Total** | 3 |

Como se pode observar pela tabela 9, todos professores dizem que sempre planificam as aulas. Este facto pode se reflectir na forma diferenciada como os conteúdos são apresentados aos estudantes.Com isto, pensa-se que é fundamental que se continue a planificar as aulas, para que a direcção do processo seja a mais eficaz.

**Pergunta 2.** No contexto prático o professor segue sistematicamente a planificação feita?

**Tabela 2. Apresentação sistematizada dos conteúdos**

| **Alternativas** | **Quantidade de estudantes** |
|---|---|
| **Sempre** | 2 |
| **Nem sempre** | 1 |
| **Nunca** | 0 |
| **Total** | 3 |

Relativamente a esta questão, como se pode observar, 2 professores dizem que sempre seguem sistematicamente o planificado, já um professor diz que nem sempre isto se materializa. Com efeito, pensa-se que é necessário que os conteúdos sejam apresentados de modo a que todos os estudantes percebam, isto será possível relacionando a apresentação com a planificação feita.

**Pergunta 3.** O professor apresenta exercícios para permitir que os estudantes actuem e se desenvolvam no processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas?

**Tabela 3. Controlo do processo**

| **Alternativas** | **Quantidade de estudantes** |
|---|---|
| **Sempre** | 3 |
| **Nem sempre** | 0 |
| **Nunca** | 0 |
| **Total** | 3 |

Quanto a apresentação de exercícios, como forma de controlo do processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas, dizem os professores sempre apresentarem. Contudo, pensa-se que a proposta de exercícios com orientações pode favorecer, ainda mais o trabalho do professor, no sentido de evitar a predominância de métodos reprodutivos.

**Pergunta 4.** Os estudantes são estimulados a participar activamente nas aulas relativas aos conteúdos de séries numéricas?

**Tabela 4. Participação nas aulas**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sempre** | 3 |
| **Nunca** | 0 |
| **Total** | 3 |

Pelos resultados da tabela 4, os professores sempre estimulam a participação dos estudantes. Entretanto, pensa-se que devemos trabalhar mais no sentido de poder ajudar os estudantes a aplicarem os conhecimentos prévios, para participarem activamente nas aulas, particularmente em aulas de exercitação, para permitir que a aprendizagem se efective, tendo em conta as diversas funções que os exercícios desempenham no processo de ensino-aprendizagem, tal como já foi descrito no primeiro capítulo.

**Pergunta 5.** O professor tem orientado a actividade prática de resolução de exercícios e problemas, sobre o tema séries numéricas?

**Tabela 5. Orientação das actividades práticas**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sempre** | 2 |
| **Nem sempre** | 1 |
| **Nunca** | 0 |
| **Total** | 3 |

A tabela acima apresentada, demonstra que dois professores sempre orientam as actividades práticas, um professor diz que nem sempre orienta. Em comparação com os resultados da pergunta 5, feita aos estudantes, pensa-se que a orientação da actividade prática pelo professor é fundamental, para que todos estudantes possam correctamente aplicar os procedimentos necessários a uma resolução eficaz, e um sistema de exercícios com algumas orientações para a sua resolução, vai influenciar positivamente nos trabalhos do professor e do estudante.

**Pergunta 6.** As actividades práticas foram organizadas de modo a que os estudantes trabalhassem:

a) Individualmente;
b) Em grupo;
c) Individualmente e por vezes em grupo.

**Tabela 6. Forma de trabalho**

| **Alternativas** | **Quantidade de estudantes** |
|---|---|
| **Individualmente** | 1 |
| **Em grupo** | 0 |
| **Individualmente/ em grupo** | 2 |
| **Total** | 3 |

Mediante os resultados da tabela acima, os estudantes variam na forma de trabalho, individualmente e por vezes em grupo, o que também é afirmado por grande parte dos estudantes, quando em comparação com as respostas da pergunta 6, neste sentido pensa-se que esta variação na forma de trabalho é essencial para permitir que os estudantes se desenvolvam mutuamente.

**Pergunta 7.** Os estudantes demonstram interesse em resolver exercícios sobre a temática das séries numéricas?

**Tabela 7. Interesse na resolução de exercícios**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sempre** | 0 |
| **Nem sempre** | 3 |
| **Nunca** | 0 |
| **Total** | 3 |

Relativamente ao interesse pela resolução de exercícios, constata-se que segundo os professores nem sempre os estudantes manifestam interesse. Neste sentido pensa-se que para que os estudantes se desenvolvam, é fundamental que os mesmos estejam motivados a actuar, daí que caberá aos professores trabalhar sempre no aspecto motivação, o que pode ser feito pela sugestão de novos exercícios.

**Pergunta 8.** O professor apresenta exemplos de situações que demandam a aplicação das séries numéricas?

**Tabela 8. Apresentação de exemplos sobre a aplicação das séries numéricas**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sim** | 2 |
| **Não** | 1 |
| **Total** | 3 |

Dois dos três professores dizem que têm aplicado exemplos práticos de aplicação das séries numéricas. Achamos que uma das formas de poder motivar os estudantes, é também mediante a apresentação de exemplos que demandam a aplicação das séries numéricas.

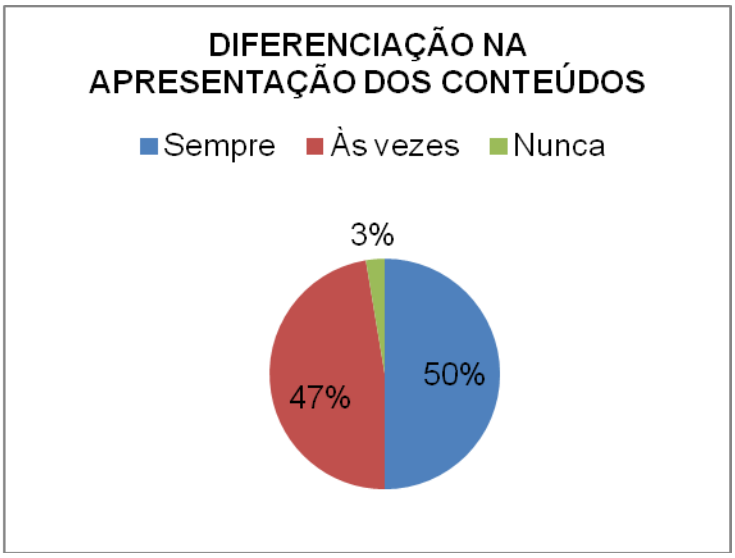
### 2.2 Análise do inquérito aplicado aos estudantes

**Questão 1.** Nas aulas sobre séries numéricas os conteúdos são abordados de forma diferenciada?

**Tabela 9. Diferenciação na abordagem dos conteúdos**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sempre** | 19 |
| **Às vezes** | 18 |
| **Nunca** | 1 |
| **Total** | 38 |

**Gráfico 1**



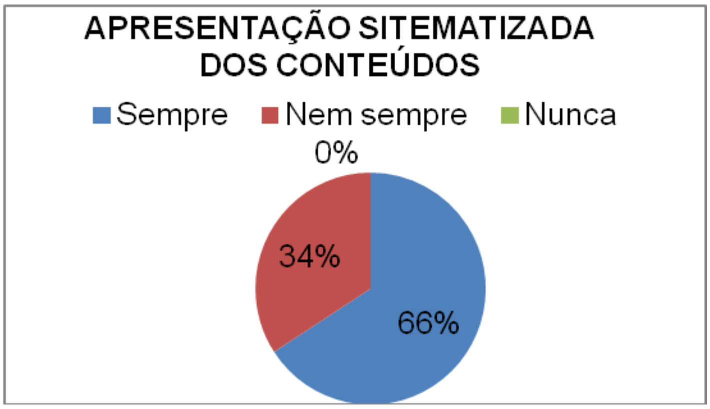

Relativamente a primeira questão constata-se que somente 19 estudantes, cerca de 50%, afirmam que há sempre uma diferenciação na forma de tratamento dos conteúdos, entretanto os professores afirmam que sempre planificam as aulas (ver tabela 1). Contudo, pensa-se que se o professor planifica, naturalmente, a forma de tratamento dos conteúdos tende a ser diferenciada, e em função da discrepância que se nota, sugere-se que se tenha sempre em consideração, no estudo das séries numéricas particularmente, a especificidade de cada conteúdo e que a forma de apresentação seja a que favoreça a adequada interpretação dos conteúdos, para que se supra as dificuldades constatadas.

**Questão 2.** Os conteúdos obedecem a uma certa sistematização, a quando da sua apresentação, no sentido de facilitar a percepção?

**Tabela 10. Apresentação sistematizada dos conteúdos**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sempre** | 25 |
| **Nem sempre** | 13 |
| **Nunca** | 0 |
| **Total** | 38 |

**Gráfico 2**



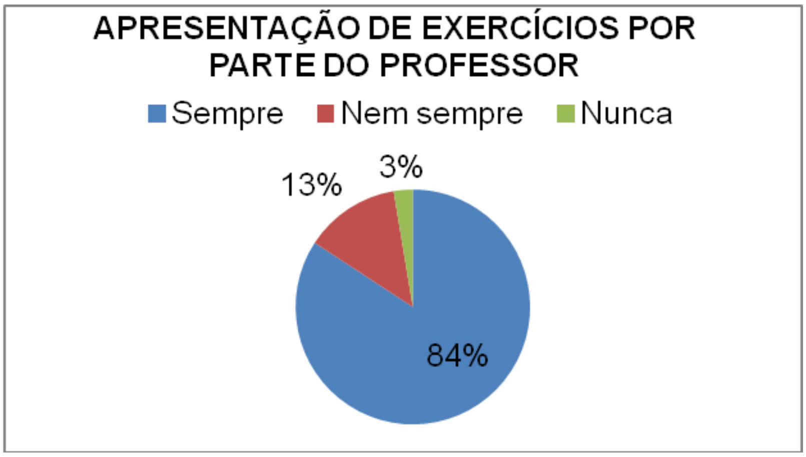

Pensamos que a falta de uma concatenação entre o planificado e o que o professor faz no contexto prático, é um factor que, muitas vezes, contribui para que a aprendizagem dos conteúdos não se efective, neste sentido, comparando os dados descritos na tabela acima e os dados da tabela 2, sugere-se que a apresentação dos conteúdos seja sempre de forma sistematizada, para permitir que os estudantes compreendam devidamente.

**Questão 3.** O professor apresenta exercícios para permitir que os estudantes actuem e se desenvolvam no processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas?

**Tabela 11. Apresentação de exercícios por parte do professor**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sempre** | 32 |
| **Nem sempre** | 5 |
| **Nunca** | 1 |
| **Total** | 38 |

**Gráfico 3.**




Os dados da tabela acima apresentada, quando comparados com os dados da tabela 3, permitem-nos considerar que, de certa forma, há neste sentido uma relativa relação entre o que os professores dizem e o que os estudantes afirmam, na medida em que o professor apresenta exercícios. Porém, é de salientar que na prática, os exercícios apresentados pelo professor não são suficientes, para possibilitar o desenvolvimento de capacidades, que se perspectiva mediante as séries numéricas; em que uma das razões pode ser a carga horária, ou seja, a quantidade de horas disponíveis para se trabalhar os conteúdos não é suficiente.

Em função da razão apresentada no parágrafo precedente, constata-se, que a contribuição que um determinado conteúdo, programático, pode oferecer ao desenvolvimento das capacidades do estudante, nem sempre se efectiva, em contexto da sala de aulas, dai que os estudantes têm de ser estimulados a realizar um trabalho independente, no sentido de aperfeiçoarem as suas capacidades, contudo grande parte do material de consulta dos estudantes não apresenta, sempre, orientações metodológicas, ao nível desejado, que podem funcionar como auxílio, ao estudante, que precisa aperfeiçoar-se (fundamentalmente estudantes do primeiro ano), por intermédio da resolução de exercícios sobre séries numéricas.

Trata-se, fundamentalmente, de livros com um carácter extremamente prático, que a sua utilização pressupõe ter bases bem consolidadas, com vista a obter resultados satisfatórios, pelo que este facto não sempre se constata nos estudantes, ou seja as bases não estão bem consolidadas, para enfrentar de forma independente conteúdos muito abstractos, como é o caso das séries numéricas. Os livros não têm, propriamente, um carácter didáctico.

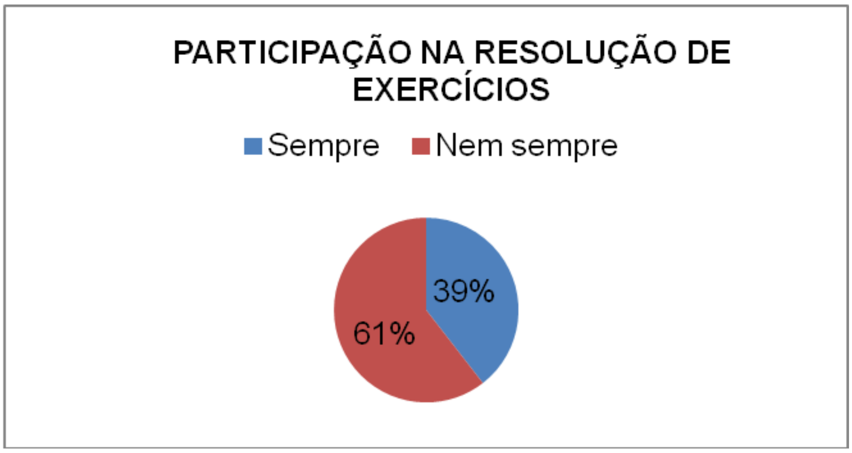
Esta constatação justifica, de alguma forma, a necessidade de se elaborar um sistema de exercícios com orientações metodológicas para sua resolução, que irão favorecer, tanto o trabalho do professor como orientador do processo, como ao estudante, no sentido de capacita-lo a intervir activamente, tornando o processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas mais dinâmico, superando desta forma, também a grande predominância dos métodos reprodutivos.

**Questão 4.** Enquanto estudante, participa activamente no processo de resolução de exercícios sobre séries numéricas?

**Tabela 12. Participação na resolução de exercícios**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sempre** | 15 |
| **Nem sempre** | 23 |
| **Total** | 38 |

**Gráfico 4**



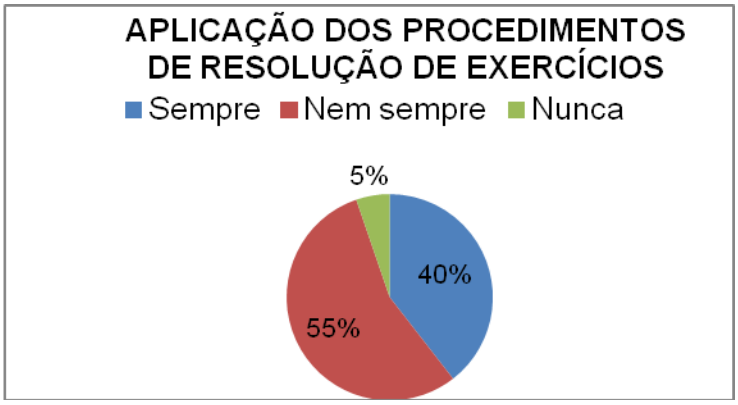

Comparando os dados da tabela antes apresentada e os da tabela 4, constata-se uma certa disparidade nas opiniões dos professores e estudantes. Desta feita, pensa-se que pelo facto dos estudantes terem dificuldades no estabelecimento de uma ligação entre os conhecimentos já estudados e a prática de resolução de exercícios, o que se constatou, também, mediante observação das aulas, é fundamental que os professores trabalhem mais no sentido de ajudar os estudantes a participar activamente na resolução de exercícios, fundamentalmente, e neste sentido a existência de um material com orientações metodológicas para a resolução de exercícios sobre séries numéricas, vem ser converte-se em necessidade, para que o estudante ganhe uma certa autonomia e participe mais.

**Pergunta 5.** Na prática de resolução de exercícios tem em consideração os procedimentos que conduzem a uma resolução mais eficaz?

**Tabela 13. Aplicação dos procedimentos de resolução de exercícios**

| **Alternativas** | **Quantidade de estudantes** |
| --- | --- |
| **Sempre** | 15 |
| **Nem sempre** | 21 |
| **Nunca** | 2 |
| **Total** | 38 |

**Gráfico 5**




No processo de resolução de exercícios, a orientação é fundamental para o alcance dos propósitos. Os dados antes apresentados, demonstram que os estudantes têm dificuldades na aplicação de procedimentos, que conduzem a uma resolução mais eficaz, uma dificuldade já antes realçada. Pensa-se que as orientações metodológicas, que se apresentarão constituem-se em elementos auxiliares, na medida em que dotarão os estudantes de ferramentas que conduzem ao alcance dos propósitos na resolução de exercícios. Entretanto, também servirão para outros estudantes, que eventualmente queiram desenvolver-se mediante a resolução de exercícios sobres séries numéricas, ou seja, o sistema associado as orientações tem um carácter geral.

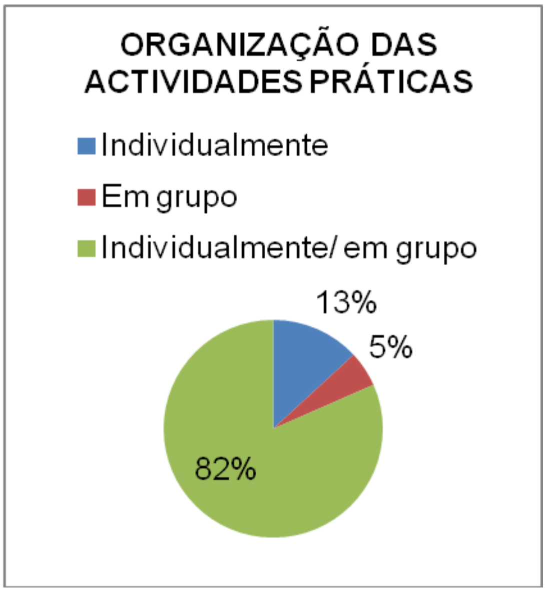
**Pergunta 6.** As actividades práticas são organizadas de modo a que os estudantes trabalhem:

a) Individualmente;
b) Em grupo;
c) Individualmente e por vezes em grupo.

**Tabela 14. Organização das actividades práticas**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Individualmente** | 5 |
| **Em grupo** | 2 |
| **Individualmente/ em grupo** | 31 |
| **Total** | 38 |

**Gráfico 6**



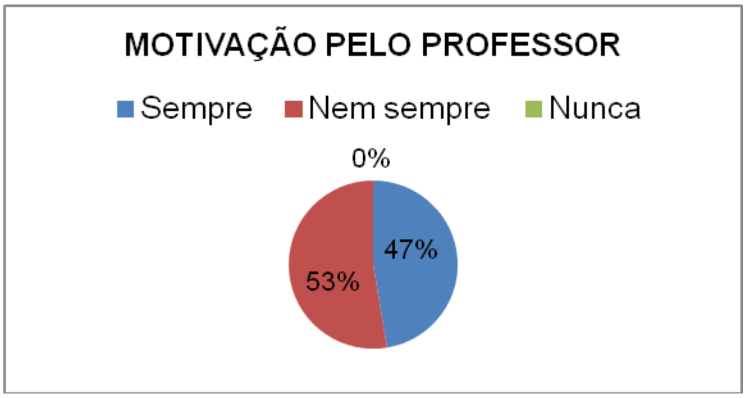

Na forma como as actividades práticas são organizadas, constata-se que predomina uma combinação entre o trabalho individual e em grupo, ou seja cerca de 82% dos estudantes escolheram a terceira alternativa. Com efeito pensa-se que no processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas, particularmente, o professor articule, cada vez mais, as formas de trabalho individual e em grupo, para permitir a troca de experiência entre estudantes, favorecendo o desenvolvimento mútuo.

**Pergunta 7.** O professor motiva os estudantes, no sentido de despertar o interesse dos mesmos para a resolução de exercícios sobre as séries numéricas?

**Tabela 15. Motivação pelo professor**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Sempre** | 18 |
| **Nem sempre** | 20 |
| **Nunca** | 0 |
| **Total** | 38 |

**Gráfico 7**




Da comparação que se faz entre a tabela apresentada anteriormente e a tabela 7 depreende-se que de certa forma, se nem sempre os estudantes demonstram interesse na resolução de exercícios, uma causa pode ser o facto de nem sempre o professor motivar suficientemente para despertar este interesse nos estudantes, e tendo em consideração os aspectos já antes descritos sobre a motivação, ou seja a sua grande influência no processo de ensino-aprendizagem, sugere-se que para a resolução de exercícios e não só haja sempre motivação para o alcance dos objectivos desejados.

**Pergunta 8.** Diga o carácter da série numérica abaixo e justifique

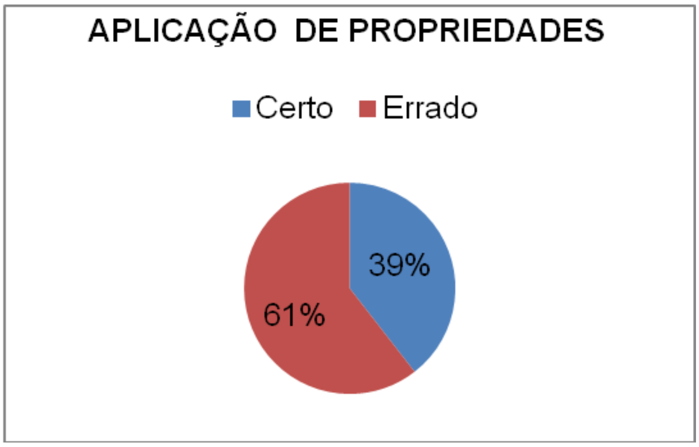
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n\, n!}{n^n}$$

a) Divergente_____
b) Condição de dependência[1]____
c) Convergente_____

**Tabela 16. Aplicação de propriedades**

| Alternativas | Quantidade de estudantes |
|---|---|
| **Certo** | 15 |
| **Errado** | 23 |
| **Total** | 38 |

**Gráfico 8**




Como se pode observar na tabela 8, somente 15 estudantes (39%) conseguiram dar a solução correcta do exercício. Este facto traduz, de alguma forma, a grande dificuldade que têm os estudantes em orientar o processo de resolução de exercícios, com isto, também, considera-se que o sistema de exercícios associado as orientações irá contribuir significativamente, para

[1] Condição de dependência, pode ser entendida como a condição de uma variável para definir o carácter da série.

mitigar a dificuldade constatada, e desta forma favorecer o processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas.

## 2.3 Sistema de exercícios

### 2.3.1 Introdução as séries numéricas

As tentativas de dar solução a um certo problema que se expõe, são, também as fontes de construção e desenvolvimento de uma teoria sobre um tópico, algo que se nota, grandemente, no campo das matemáticas, como é o caso dos problemas relacionados com a tangente a uma curva num ponto e o cálculo de área. Assim, as séries, também não se depreendem fora desta lógica de pensamento.

O desenvolvimento dos conteúdos sobre séries, particularizando as séries numéricas, está intimamente ligado a análise do infinito. Tal como Sampaio, P. A. (2008), "o infinito sempre foi um tema controverso que afectou a mente humana. A sua aceitação como objecto de estudo na matemática não foi pacífica, sendo ainda muito recente, apesar da longa história que lhe está associada"'.

A reflexão sobre o infinito levou a formulação dos chamados paradoxos, e neste sentido destacam-se os paradoxos formulados pelo filósofo grego Zenão[2], muitos dos quais estando associados ao movimento. Como exemplo, consideremos o seguinte paradoxo:

Um corredor que sai de um ponto nunca pode alcançar a meta porque sempre tem que percorrer a metade da distância que o separa da mesma, ao infinito.
Se assumirmos que ao corredor lhe faz a uma velocidade constante e que corre a metade da distancia total em $Q$ minutos, a quarta parte o fará em $\frac{Q}{2}$, a oitava parte em $\frac{Q}{4}$ e assim sucessivamente, o qual se pode expressar matematicamente mediante a soma: $Q+\frac{Q}{2}+\frac{Q}{4}+\frac{Q}{8}+...+\frac{Q}{2^n}+...$ o que da lugar a necessidade de encontrar um número que represente esta soma.

[2] Zenão de Eleia (490-435 a.C.) filósofo grego, discípulo de Parménides.

Problemas como o anteriormente exposto e outros, impulsionaram os matemáticos a procurar formas de soluciona-los e, as investigações realizadas permitiram a construção de uma teoria em torno das séries. Neste sentido, destacam-se como exemplo Cauchy, D'Alembert, Leibniz, Dirichelet, Raabe, Abel, Tylor, Mac-Laurin.

Considerar, também que a teoria das séries, veio dar outro impulso no desenvolvimento da matemática, na medida em que é aplicável na solução de vários problemas levantados em diversos ramos do conhecimento matemático, e não só. Mormente em Análise numérica, Equações diferenciais, Cálculo de áreas, Física, Engenharia.

Com efeito, dada a grande importância que as séries têm, como ferramenta de solução de vários problemas no campo da matemática, particularmente, e em outras áreas do conhecimento, torna-se imprescindível ao profissional do ensino da matemática a compreensão e domínio deste conhecimento.

Ao falarmos de série, estamos a nos referir a uma sucessão, cujos termos obtêm-se mediante a soma dos termos de uma outra sucessão, ou seja, uma série é, pois, uma sucessão gerada por outra sucessão, mediante a operação de soma.

Tal como Baptista, O. M. e Silva, A. M. (2005) consoante os termos, a serem somados, sendo constantes ou dependentes de uma (ou mais) variável, consideram-se dois casos:

- Séries Numéricas;
- Séries de funções.

No entanto, para este trabalho as séries numéricas é que constituem, mormente, o foco de abordagem.

Assim, numa série, o fundamental traduz-se na generalização da operação de soma, quando o número de parcelas tende ao infinito, levantando inquietações como:

- A soma de infinitos termos é finita?
- Como nos assegurar de que uma soma é ou não finita?

Questões como as apresentadas no parágrafo precedente, e outras, serão objecto de análise na sequência do trabalho. E considerando que o objectivo, assenta-se na proposta de um sistema de exercícios sobre séries numéricas, pensa-se que, a apresentação de alguns elementos, relativamente, teóricos sobre as séries numéricas é fundamental, para também auxiliar a compreensão. Desta feita define-se séries numéricas, consideram-se algumas séries fundamentais, são apresentadas algumas propriedades, critérios de convergência, orientações metodológicas, para a determinação do carácter e são apresentados exercícios resolvidos.

### 2.3.2 Definição de série numérica

"Seja $(a_n)$ uma sucessão de números reais. Chama-se série gerada por $a_n$ à sucessão $(S_n)$ definida do modo seguinte:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
..................................
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$
..........................................

Para designar a série usa-se as notações: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ....$, $\sum a_n$ , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ [3]

Os números $a_1, a_2, \cdots$ chamam-se termos da série, $a_n$ diz-se termo geral da série e as somas $S_1, S_2, \cdots$ chamam-se somas parciais" (Sá, A. A. e Louro, B., 2009).

[3] A identificação de uma série com o símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é um abuso de linguagem já que é a identificação da série com a sua soma, quando ela existe. Este abuso, no entanto, é de uso corrente e tem-se demonstrado útil e inofensivo. (Sá, A. A. e Louro, B., 2009)

De grande importância no estudo das séries numéricas, é a noção de convergência, assim sendo, como se pode definir a convergência de uma série?

**Convergência de uma série. Definição**

A série $\sum a_n$ [4] diz-se convergente se existir e for finito o limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Se este limite não existir ou não for finito a série diz-se divergente. No caso de convergência chama-se soma da série ao valor, $S$, do limite de $S_n$, isto é,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Numa série há a considerar duas sucessões:

- A sucessão que representa o termo geral, a qual define a série; e neste sentido, toda série deve ter um termo geral;
- A sucessão formada pelas somas parciais.

No entanto, o carácter (convergência ou divergência) da série, isto é, se a série tende a um número real ou não, fica esclarecido por definição, levando ao limite a sucessão das somas parciais, quando a expressão analítica que a representa é conhecida. Porém as dificuldades de encontrar a expressão analítica das somas parciais, de modo geral, são enormes.

Ao falarmos do carácter de uma série, e consequentemente de sua soma, quando a série converge, é imprescindível considerar, que algumas séries são fundamentais, dado que o seu carácter já se encontra, de certa forma, definido, e nos casos de convergência a soma também pode ser calculada de modo

[4] Segundo Baptista, O. M. e Silva, A. M. (2005), quando usarmos o símbolo $\sum a_n$ para representar uma série, subentenderemos que $n \geq n_0$, sendo $n_0$ o mais pequeno número natural tal que, para $n \geq n_0$, todos os termos $a_n$ se encontrem definidos.

exacto. Por outro lado são fundamentais, na medida em que auxiliam na análise do carácter de séries, relativamente, complexas.

Segundo Thomas, G. B. (2009) as séries fundamentais são:

- Geométricas;
- Telescópicas;
- Harmónicas.

**Série geométrica**

Segundo Sá, A. A. e Louro, B. (2009), chama-se série geométrica à série gerada por uma progressão geométrica.

Ou seja, dada uma progressão geométrica, somando os seus termos obtemos a chamada série geométrica.

Com efeito, seja a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots$ ,

onde o primeiro termo é $a$ e a razão da progressão que a determina é $q\,(a \neq 0)$.

A soma dos $n$ primeiros termos da progressão geométrica quando $q \neq 1,$ é igual a

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

Podemos considerar, então as seguintes condições:

1. Se $|q| < 1$ então $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, e por conseguinte,

   $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$. Assim, a série converge, e sua soma é

   exactamente $S = \frac{a}{1-q}$.

2. Se $|q| > 1,$ então $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, logo a série é divergente.
3. Se $q = 1,$ a série escreve-se $a + a + a + \ldots$ , por conseguinte

   $S_n = na$ , $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$ então a série diverge.

4. Se $q = -1,$ a série escreve-se $a - a + a - a + \ldots$ e

$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ é par} \\ a \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$ então $S_n$ não tem limite, e a série diverge.

Consideremos os exemplos seguintes:

**Exemplo n° 1**: Analise a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

**Solução:**

Nesta série, designemos por $a_n = \frac{1}{2^n}$ o termo geral.

Como o termo geral da série constitui uma progressão geométrica, então a série é geométrica. Tendo em conta que a razão é $\frac{1}{2}$, e considerando as condições dadas anteriormente, a série é convergente, pois $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ e sua soma é:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

**Exemplo n° 2:** Seja a série $1 - 2 + 2^2 - ... + (-2)^{n-1} + ...$. Analise seu carácter.

**Solução:**

Trata-se de uma série geométrica, pois o termo geral $b_n = (-2)^{n-1}$ é uma progressão geométrica de razão $q = -2$. Como $|q| = |-2| = 2 > 1$, pela condição n° 2 da definição da convergência de uma série geométrica, a série proposta é divergente.

**Séries Telescópicas**

Segundo Sá, A. A. e Louro, B. (2009), "são séries cujo termo geral $a_n$ se pode escrever na forma $\alpha_n - \alpha_{n+k}$, com $k \in \mathrm{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+k})$$

A decomposição do termo geral, como diferença de duas sucessões, permite determinar a expressão da sucessão das somas parciais por eliminação de termos consecutivos e, em consequência, estudar o carácter da série, mediante a definição, e em caso de convergência, calcular facilmente a soma.

Por conseguinte, sua soma calcula-se por $S=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i - ka$, onde $a=\lim\alpha_n$.

Da relação anteriormente apresentada, resulta óbvio que, para que haja convergência, o limite $a=\lim\alpha_n$ tem de ser finito.

**Exemplo:** Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Analise o seu carácter.

**Solução:**

O termo geral da série é $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, que representa uma fracção racional própria[5] ou regular. Recorrendo a decomposição de uma fracção racional própria em elementos simples, temos $\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}\right)$ onde $A \ e \ B$ são constantes a determinar. Com efeito,

$$\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}\right)\Rightarrow 1=A(n+1)+Bn$$

$$\Rightarrow 1=n(A+B)+A$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$$

Com isto, o termo geral pode-se escrever na forma $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

Formando as somas parciais, a partir da nova expressão equivalente ao termo geral, obtém-se:

$$S_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$S_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$S_3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

..................................................................

$$S_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

..........................................................

[5] Rever a decomposição de fracções racionais em elementos simples.

Ou seja, a nova expressão permitiu deduzir a sucessão das somas parciais, $S_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

Aplicando a definição de convergência, calculemos o limite de $S_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$ logo a série converge e sua soma é 1, ou seja

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

O procedimento precedentemente descrito, permitiu encontrar a soma, mediante dedução da sucessão das somas parciais, e em função da definição de convergência, chegou-se a conclusão de que a série dada converge para a unidade. Entretanto, pode-se chegar a este resultado, recorrendo a fórmula da soma de uma série telescópica, a quando da sua convergência, com efeito, $S = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i - ka,$ como $k = 1$ e $a = 0$, então $S = \frac{1}{1} - 1.(0) = 1$

Paralelamente as séries geométricas e telescópicas é, também de grande interesse, por exemplo, a chamada série harmónica na medida em que auxiliam em muitos casos na análise do carácter de séries, relativamente complexas.

**Séries harmónicas (Séries de Dirichelet)**

Segundo Guidorizzi, H. L. (2012), "a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, onde $\alpha$ é um real dado, denomina-se série harmónica de ordem $\alpha$ ". Relativamente ao seu carácter, pode-se dizer que:

- Para $\alpha > 1$, a série é convergente;
- Para $\alpha \le 1,$ a série é divergente.

**Exemplo:** As séries $\sum\frac{1}{n},\ \sum\frac{1}{\sqrt{n}},\ \sum\sqrt{n},\ \sum\frac{1}{n^{\sqrt{2}-1}}$ são divergentes pois têm ordem $1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\sqrt{2}-1$ respectivamente. Já as séries $\sum\frac{1}{n^3},\ \sum\frac{1}{n^{\sqrt{2}}},\ \sum\frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}$ são convergentes, pois têm ordem $3;\sqrt{2};\frac{7}{3}$ respectivamente.

**Algumas propriedades sobre as séries numéricas**

1. **Linearidade das séries convergentes**

A série $\sum(\alpha a_n+\beta b_n)$ , onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes, converge se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem; se as somas forem $A$ e $B$, respectivamente, então

$$S=\sum(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum a_n+\beta\sum b_n=\alpha A+\beta B$$

2. **Multiplicação por uma constante**

Se multiplicarmos todos os termos de uma série pela mesma constante, diferente de zero, obtém-se uma outra série com a mesma natureza (carácter).

3. **Alteração de termos**

Quando se suprime, acrescenta ou substitui um número finito de termos duma série, obtém-se uma outra, com a mesma natureza da primeira, embora, em caso de convergência, a nova série possa ter soma diferente.

4. **Soma duma série convergente com outra divergente**

Da soma algébrica[6], de uma série convergente com outra divergente, resulta sempre uma série divergente.

5. **Associatividade**

[6] Somar algebricamente, termo a termo, duas séries é formar uma nova série em que cada termo é igual à soma algébrica dos termos de igual ordem das séries dadas. (Baptista, O. M. e Silva, A. M. 2005)

Não se altera a soma de uma série convergente quando se associam vários termos consecutivos num só, desde que os termos associados sejam em número finito.

6. **Série resto**

Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , resto de ordem n, é a série $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k} + ...$ que se obtém a partir da série dada, suprimindo os seus n primeiros termos. (Baptista, O. M. e Silva, A. M., 2005)

Da comparação das propriedades 3 e 6, resulta óbvio que, a série resto, qualquer que seja a sua ordem, converge ou diverge ao mesmo tempo que a respectiva série. No caso de convergência, tem-se:

$$R_n = S - S_n$$

Sendo $R_n$ a soma da série resto.

Contudo, a soma da série resto de ordem n converte-se numa função de n, e levando ao limite quando n tende ao infinito, chega-se à uma certa conclusão:

6.1. A soma da série resto de ordem n de uma série convergente tende para zero, quando $n \to \infty$.

**Condição necessária e suficiente (de Cauchy) para a convergência de uma série numérica**

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente $\Leftrightarrow$ para todo ε > 0, existe um número natural $n_0$ tal que para $n > n_0 \Rightarrow \left| a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon,$ com $p \in \mathbb{N}$.

De modo equivalente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} R_n = 0.$

Por conseguinte, pode-se chegar a uma conclusão sobre o carácter de uma série, mediante a análise do seu resto de ordem n. Entretanto, tal como Baptista, O. M. e Silva, A. M. (2005) “ as eventuais dificuldades do cálculo de $R_n$ são, porém, as mesmas que as do cálculo do valor exacto da soma da série; mas, em grande parte dos casos, é possível majorar $|R_n| = |S - S_n|$ , uma vez que, convergindo a série, o resto tende para zero, quando a respectiva ordem tende para mais infinito.”

**Condição necessária de convergência**

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $(a_n)$ é infinitesimal, é dizer, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. **Demonstração:**

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, logo $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ por ter $S_n$ e $S_{n-1}$ ao mesmo limite.

A condição é necessária, mas não suficiente já que, por exemplo a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e o seu termo geral $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ é uma sucessão infinitesimal.

Uma vez que pela definição não sempre é possível averiguar o carácter de uma série numérica, dadas as dificuldades de se encontrar a expressão analítica da sucessão das somas parciais, é fundamental considerar os chamados critérios de convergência.

Os critérios de convergência, convertem-se em condições suficientes para afirmar se uma dada série numérica é ou não convergente, e em caso de convergência, estimar a sua soma. Os critérios não são generalizados, mas sim são particulares, ou seja, cada critério estabelece os requisitos ou condições que uma determinada série deve cumprir para que, mediante tal critério, seja possível esclarecer o carácter.

**Critérios de convergência**

**Nota:** Em muitas situações, a condição necessária de convergência, anteriormente apresentada, é caracterizada como um critério suficiente para a divergência de uma determinada série, quando o termo geral não é um infinitesimal. Em outros termos, podemos afirmar que uma determinada série é divergente, na medida em que o seu termo geral não converge para zero. Portanto, a utilização desta condição requer prudência.

**Séries de termos positivos**

Ao falarmos das séries de termos positivos, estamos considerando, naturalmente, séries cujos termos são não negativos.

Antes da descrição dos critérios de convergência, para as séries de termos positivos, convém considerar o seguinte teorema:

**Teorema:** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e só se, a sucessão das somas parciais é limitada.

O teorema enunciado, é fundamental na medida em que, também pode nos assegurar se uma determinada série é ou não convergente, sendo essencial comprovar que a sucessão das somas parciais está limitada ou não.

1. **Critério de comparação**

O critério da comparação, visa analisar a natureza de uma série, de termos positivos, mediante comparação com outra série (de mesma característica), tomada como referência. Este critério estabelece o seguinte:

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos tais que $a_n \leq b_n \ , \forall n \in \mathrm{N}.$[7]

a) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

[7] Mediante a propriedade 3, pode-se então considerar que a condição é válida se $\exists\, p \in \mathrm{N} : a_n \leq b_n \ \forall n \geq p$

b) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

No critério de comparação, o procedimento consiste em estabelecer cotas, superior ou inferior, ao termo geral de uma determinada série. No caso da convergência, limita-se superiormente o termo geral e em caso de divergência, limita-se inferiormente. No entanto, ter conhecimento de diversas séries numéricas, quer sejam convergentes ou divergentes, é uma condição necessária, para se obter bons resultados pelo critério em causa.

A comparação também pode ser feita mediante o cálculo de limite.

### 1.1. **Critério de comparação por intermédio do limite**

Este critério estabelece o seguinte:

Se $a_n > 0$ e $b_n > 0$ (pelo menos a partir de certa ordem) e se existe $L = \lim \frac{a_n}{b_n}$, ocorre uma e só uma das três seguintes situações:

a) Se $L \neq 0$ e $L \neq +\infty$, as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem ou divergem ao mesmo tempo.

b) Se $L = 0$, a divergência de $\sum a_n$ implica a de $\sum b_n$ e a convergência de $\sum b_n$, a de $\sum a_n$.

c) Se $L = +\infty$, a convergência de $\sum a_n$ implica a de $\sum b_n$ e a divergência de $\sum b_n$, a de $\sum a_n$.

## 2. **Critério da razão**

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Se existe $q < 1$ e $n_0$ tais que:

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,\ n \geq n_0,$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,\ n \geq n_0,$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente.

Mediante a passagem ao limite do quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, pode-se, também chegar a conclusões relativamente ao carácter da série. Este facto, remete-nos para o importante critério de D'Alembert.

### 2.1. Critério de D'Alembert

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , de termos positivos. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,

a) Sendo $q < 1$, a série converge.

b) Sendo $q > 1$, a s diverge.

No caso em que $q = 1$ o critério nada nos revela, podendo a série dada convergir ou mesmo divergir.

O critério de D'Alembert está especialmente indicado na análise de séries em cujos termos figurem potências, factoriais e produtos sucessivos (Baptista, O. M. e Silva, A. M. 2005).

## 3. Critério da raiz

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , com $a_n \geq 0$ para todo

a) Se existirem $q(0 < q < 1)$ e $n_0$, tais que $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, para $n \geq n_0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Se para $n \geq n_0$ é $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

**Demonstração:**

a) Se existirem $0<q<1$ e $n_0$, tais que $0 \le \sqrt[n]{a_n} \le q \ (n \ge n_0)$, então $0 \le a_n \le q^n \ (n \ge n_0)$ e pelo critério de comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ é uma série geométrica, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Se para $n \ge n_0$ é $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \Rightarrow a_n \ge 1$, então $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Levando ao limite $\sqrt[n]{a_n}$, pode-se em muitas situações ter conclusões sobre a natureza da série.

### 3.1. Critério da raiz com passo ao limite (Critério de Cauchy)

Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, de termos positivos. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, então:

a) Se $q<1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Se $q>1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverge.

Relativamente ao critério de Cauchy, quando o valor do limite for a unidade, autores há que afirmam que nada se pode concluir sobre o carácter da série numérica, entretanto convém destacar Baptista, O. M. e Silva, A. M. (2005), segundo os quais, quando o limite for a unidade:

- A série diverge quando $q=1^+$, isto é, se $q=1$, mas $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, pelo menos a partir de certa ordem.

Cada critério, apresenta as suas vantagens. Neste sentido, segundo Baptista, O. M. e Silva, A. M. (2005) o critério de Cauchy é muito cómodo para expressões da forma $a_n = [f(n)]^n$.

## 4. Critério de Raabe

Considerando que nem sempre é possível chegar a conclusões sobre o carácter da série, mediante os critérios já antes descritos, quanto mais critérios se conhecerem maior serão as possibilidades de se ter uma ideia da natureza, neste sentido, consideremos, também o critério de Raabe.

Tal critério estabelece:

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Suponhamos que

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = a.$$

Então tem-se duas situações:

a) Se $a < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente;

b) Se $a > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

**Séries de termos alternadas**

Uma série diz-se alternada se os seus termos são alternadamente positivos e negativos. (Sá, A. A. e Louro, B. 2009)

Pode-se escrever a série na forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,\ a_n > 0 \quad \forall n \in \mathrm{N}.$

Em particular, para este tipo de séries, será apresentado o critério de Leibniz.

**Critério de Leibniz**

- Se $(a_n)$ é uma sucessão decrescente de termos positivos e $\lim a_n = 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ é convergente.

Os critérios descritos anteriormente, são particulares, na medida em que fazem sentido, desde que as séries consideradas cumpram com os requisitos exigidos. Suponhamos então que uma determinada série não é, somente de termos positivos, mas que os seus termos variam de sinal de modo irregular. Neste sentido introduz-se a convergência absoluta.

**Séries de termos de sinais quaisquer (Convergência absoluta)**

Uma série diz-se de termos de sinais quaisquer se se encontra entre os seus termos, quer termos positivos quer termos negativos, ou seja os termos da série não todos positivos. As séries alternadas, naturalmente, são uma particularidade das séries de termos de sinais quaisquer.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos de sinais quaisquer. A série da forma $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, chama-se série dos valores absolutos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Mediante definição da série dos valores absolutos, introduz-se o critério de convergência absoluta para uma dada série, segundo o qual:

- Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, o mesmo acontece à série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Portanto uma série de termos de sinais quaisquer pode:

- Convergir absolutamente, quando cumpre-se a condição dada anteriormente, e neste caso acrescentamos o facto de que $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
- Ser simples ou condicionalmente convergente, quando a série converge, mas não converge absolutamente;
- Divergente, quando, naturalmente, não converge nem simples e nem absolutamente.

Contudo, para analisar se uma série converge absolutamente, os critérios anteriormente estudados, para as séries de termos positivos auxiliam nesta tarefa, em virtude da definição do valor absoluto de um número real. Por outro, dizer que toda série de termos positivos que converge, também converge absolutamente, pela própria definição de módulo de um número real.

## 2.4 Orientações metodológicas para a determinação do carácter de uma série numérica

Até ao momento foram descritos alguns elementos teóricos, considerados necessários, para uma melhor abordagem das séries numéricas, e uma fonte de auxílio visando a resolução de exercícios. Porém, pensa-se que tendo em vista a obtenção de resultados satisfatórios, ou para que o processo de resolução de exercícios sobre séries numéricas, fundamentalmente, na análise do carácter seja o mais eficaz e contribua de facto ao desenvolvimento das capacidades do estudante, um conjunto de orientações metodológicas que a seguir se apresenta poderão favorecer grandemente neste sentido.

Diante de uma série numérica, pensa-se que algumas orientações que podem auxiliar na análise do seu carácter, são as que apresentamos na sequência:

- Ë fundamental que se tenha em consideração, como condição necessária, os conhecimentos gerais sobre sucessões e sobre limites de sucessões, com vista a obter bons resultados;

- Identificar o tipo de série. Tal identificação, consiste na análise do termo geral da série, o qual pode indicar se a série é ou não fundamental, por outro lado a análise do termo geral, permite em algumas situações, decompor uma expressão, relativamente, complexa em outra, relativamente, simples que favoreça o estudo que se pretende.

- Caso a série seja fundamental, determinar o seu carácter pelos procedimentos particulares a estes tipos de séries;

- Não sendo a série de um dos tipos considerados fundamentais, recorre-se aos critérios de convergência.

- Diante dos critérios, identificar as características dos termos da série, relativamente ao sinal;

- Sendo a série de termos positivos, há que considerar os critérios como o de comparação (de modo geral), da razão ou de D'Alembert, critério da raiz ou de Cauchy, entre outros;

- Para séries de termos alternantes, pode-se aplicar o critério de Leibniz, tendo em conta sempre o cumprimento de suas condições; ou considera-las como particularidade das séries de termos de sinais quaisquer e estudar a convergência absoluta;

- Ao aplicar a condição necessária de convergência há que ter prudência, na medida em que trata-se apenas de uma condição necessária e não suficiente para a convergência, entretanto esta condição é suficiente para concluir o carácter da série quando o termo geral não à satisfaz.

**Exemplos resolvidos**

**Exemplo n° 1:** Investigue a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3^n}{6^n}$.

**Solução:**

Seja $b_n = \frac{4^n + 3^n}{6^n}$ o termo geral da série. A investigação que se pretende, começa pela análise do termo geral. Por conseguinte, constata-se a presença de três progressões geométricas; e pelo modo como aparecem ordenadas, possibilita decompor o termo geral na seguinte forma $b_n = \frac{4^n + 3^n}{6^n} = \frac{4^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Assim a série pode ser escrita da seguinte maneira $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$. Como o termo geral apresenta-se como "soma" de duas progressões geométricas, façamos um estudo independente das séries geométricas $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot$ Com efeito, as séries têm como razão dos termos gerais, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente, o que faz com que sejam séries convergentes, já que cumprem a condição de convergência de uma série geométrica, pelo que as suas somas são:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}=2 \; e \; B=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=1$$

Assim pela propriedade da linearidade das séries convergentes, a série proposta também é convergente e sua soma é:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+3^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=(A+B)=(2+1)=3$$

**Exemplo n° 2:** Determine o carácter da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$.

**Solução:**

Comecemos por identificar o termo geral da série, então temos $a_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)$.

Do termo geral, constata-se que a série não é geométrica, dificilmente poder-se-á decompor o termo geral, de modos a se ter uma série telescópica, e tão pouco trata-se de uma série harmónica. Contudo, a expressão do termo geral representa o quociente entre dois polinómios de mesmo grau[8], portanto o termo geral da série tende a um valor real. Calculemos o limite ao qual tende o termo geral.

[8] Ver teoremas sobre os limites de sucessões.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right). = \frac{1}{3} \neq 0$$

Como o termo geral da série tende a um valor real diferente de zero, aplicando a condição necessária de convergência de uma série numérica, podemos afirmar que a série proposta é divergente, pois o termo geral não é um infinitesimal.

**Exemplo n° 3:** Seja a série numérica $\sum_{1} \frac{|sen(n)|}{n^2}$. Analise o seu carácter.

**Solução:**

Seja $a_n = \frac{|sen(n)|}{n^2}$ o termo geral da série. Observamos, que a série não é fundamental. Estudemos a convergência do termo geral: $\lim a_n = \lim \frac{|sen(n)|}{n^2} = \lim\left(\frac{1}{n^2} \cdot |sen(n)|\right) = 0$

Portanto verifica-se que o termo geral é um infinitesimal, por ser o produto de uma sucessão limitada com uma sucessão infinitesimal, assim, a condição necessária de convergência está satisfeita, porém como já esclarecemos, a condição é necessária e não suficiente. Desta feita, para nos assegurarmos se de facto a série converge ou não, recorremos aos critérios de convergência.

Pela definição de módulo, tem-se $|sen(n)| > 0, \forall n \geq 1$, por outro lado $\forall n \geq 1 \Rightarrow n^2 > 0$, com isto podemos afirmar que a série é de termos positivos.

No termo geral constata-se um elemento, que de certa forma, favorece a aplicação do critério de comparação, no caso $\frac{1}{n^2}$. Com efeito, $|sen(n)| \leq 1 \Rightarrow \frac{|sen(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Agora, consideremos a sucessão $b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow a_n \leq b_n, \forall n \geq 1$. Como a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente (uma vez que se trata de uma série harmónica de ordem 2), logo, pelo critério de comparação, a série $\sum_{1} \frac{|sen(n)|}{n^2}$ também converge.

Como se pode observar, neste caso limitamos superiormente o termo geral da série dada, pelo termo geral de outra série convergente.

**Exemplo n° 4**: Investigue a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$.

**Solução:**

Denotemos por $b_n$ o termo geral da série, então $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3}$. Assim, o termo geral representa o quociente entre duas expressões, relativamente, diferenciadas, em que no numerador temos um radical de índice par e no denominador temos um polinómio de grau 1. Por conseguinte $\lim b_n = \lim \frac{\sqrt{n}}{n+3} = 0$, ou seja, o termo geral é um infinitesimal, pelo que cumpre-se a condição necessária de convergência.

Contudo, apliquemos um critério, para afirmarmos se de facto a série converge ou diverge. Nestas condições escrevemos o termo geral na forma $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} = \frac{n}{\sqrt{n}\,(n+3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{n}{n+3}\right)$. Verifica-se que um dos factores da nova expressão do termo geral, já é relativamente conhecido, no caso a sucessão $a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Assim, consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ que como sabemos é divergente, por se tratar de uma série harmónica de ordem $\left(\frac{1}{2}\right)$. Desta feita, a aplicação do critério de comparação por intermédio do limite é favorável;

assim, formemos o quociente $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{n}{n+3}\right)}=\frac{n+3}{n}$, levando ao limite tem-se: $\lim\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{n+3}{n}=1\neq 0$. Portanto, como o limite do quociente é diferente de zero, pela primeira condição do critério de comparação por intermédio do limite, as séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}$ têm o mesmo carácter, e como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente, então a série proposta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}$ também é divergente.

**Nota:** Como vimos no exemplo anterior, a transformação do termo geral, em muitas situações, pode ter como consequência um indício da propriedade, ou critério a aplicar, no sentido de favorecer a investigação da natureza da série. Não obstante, em algumas séries, após a aplicação dos procedimentos necessários para a análise do carácter, existem certas condições, a que os elementos que aparecem na expressão analítica do termo geral, devem satisfazer, para se ter uma conclusão sobre o carácter. Fala-se aqui das condições de dependência. Vejamos o exemplo seguinte.

**Exemplo n° 5:** Analise a convergência das séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{an}\right)^n \ (a>0)$ .

**Solução:**

Seja $t_n=\left(\frac{1+n}{an}\right)^n$ o termo geral da série, $\forall n\geq 1 \Rightarrow \left(\frac{1+n}{an}\right)^n>0$ portanto, trata-se de uma série de termos positivos. Contudo,

$t_n=\left(\frac{1+n}{an}\right)^n=\left[\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1+n}{n}\right)\right]^n=\left(\frac{1}{a}\right)^n\left(\frac{1+n}{n}\right)^n=\left(\frac{1}{a}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ . Assim a expressão resultante da transformação do termo geral fornece-nos uma ideia do critério a empregar, com efeito podemos utilizar a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ $(a>0)$, (que já é conhecida, pois trata-se de uma série geométrica), para compará-la com a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{an}\right)^n$ $(a>0)$. Contudo, seja $b_n=\left(\frac{1}{a}\right)^n$, então, formemos o quociente $\frac{t_n}{b_n}$ e calculemos o seu limite: $\frac{t_n}{b_n}=\frac{\frac{1}{a^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{a^n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e\neq 0$. Como o limite é diferente de zero, pelo critério de comparação por intermédio do limite, notadamente a primeira condição, as séries $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{an}\right)^n$ $(a>0)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ $(a>0)$ têm o mesmo carácter. Entretanto, como a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ $(a>0)$ é geométrica de razão $\frac{1}{a}$, em função da condição de $a$ $(a>0)$ existem duas situações:

- A série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ $(a>0)$ converge se $\frac{1}{a}<1$, isto é, no caso em que $a>1$;
- A série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ $(a>0)$ diverge se $\frac{1}{a}\geq 1$, isto é, no caso em que $0<a\leq 1$;

Assim podemos concluir que a série proposta $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{an}\right)^n$ $(a>0)$:

- É convergente quando $\frac{1}{a}<1$, ou seja, se $a>1$;
- É Divergente quando $\frac{1}{a}\geq 1$, ou seja, se $0<a\leq 1$;

Como vimos no exemplo descrito, para concluirmos algo relativo a convergência da série proposta, foi necessário considerar as condições de dependência, ou seja, a condição da variável $a$. Este facto pode ser verificado em outras séries com a mesma característica, por isso é essencial uma análise minuciosa do termo geral.

**Exemplo n° 6:** Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n n!}{n^n},\ k>0$ .

**Solução:**

Trata-se de uma série, que não se enquadra nas consideradas como fundamentais. Todavia, é uma série de termos positivos, em função das condições dos elementos do termo geral.

Seja $a_n=\frac{k^n n!}{n^n}$ o termo geral. Em função das suas particularidades, notadamente a presença de expressões exponenciais, assim como o factorial, é conveniente recorrer ao critério de D'Alembert. Com efeito, $a_n=\frac{k^n n!}{n^n}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

Consideremos o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{k^n n!}{n^n}}=\frac{k^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}k^n\, n!}=k\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Levando ao limite, tem-se: $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\left[k\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]=k\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=k.\frac{1}{e}$

Analogamente ao exemplo anterior, a conclusão sobre o carácter, depende das condições de $k$.

Assim, o critério de D'Alembert permite-nos concluir que:

- Se $\frac{k}{e}<1,$ isto é, se $k<e,$ a série é convergente;
- Se $\frac{k}{e}>1,$ isto é, se $k>e,$ a série é divergente;
- Se $\frac{k}{e}=1,$ isto é, se $k=e,$ o critério nada nos revela.

Entretanto, no caso em que $k = e$, o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pelo menos a partir de certa ordem. Por conseguinte, pelo critério da razão a série é divergente para $k = e$.

**Nota:** Quando, naturalmente, por um critério não nos é possível concluir se a série é ou não convergente, deve-se fazer o estudo, recorrendo a outros critérios. No exemplo apresentado, viu-se que o critério de D'Alembert não foi suficiente para esclarecer ao todo o carácter da série, daí que recorremos ao critério do quociente, no caso em que $k = e$. Portanto, quando nosso objectivo é analisar o carácter, a aplicação dos critérios, é uma questão de conveniência.

**Exemplo n° 7**: Determine o carácter da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$.

**Solução:**

A série é de termos positivos. Para a determinação do seu carácter, pela característica do termo geral, pode-se aplicar tanto o critério de Cauchy, como o critério de D'Alembert, pois ambos são favoráveis.

Seja $b_n = \frac{2^{n-1}}{n^n}$ o termo geral da série. Apliquemos o critério de Cauchy. $b_n = \frac{2^{n-1}}{n^n} \Rightarrow \sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{n-1}}{n^n}} = \frac{2}{n} . \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Levando ao limite, tem-se: $\lim \sqrt[n]{b_n} = \lim \left[ \left(\frac{2}{n}\right) . \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \right] = 0 < 1.$

Como o limite é menor que a unidade, pelo critério de Cauchy, a série proposta é convergente. Aplicando o critério de D'Alembert, temos:

$$b_n = \frac{2^{n-1}}{n^n} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{2^n}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^{n-1}}{n^n}} = \frac{2^n\, n^n}{2^{n-1}(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{2^{-1}(n+1)^n(n+1)} = \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n . \left(\frac{2}{n+1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \lim\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n . \left(\frac{2}{n+1}\right)\right] = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n . \lim\left(\frac{2}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{e}\right).(0) = 0 < 1$$

Portanto, a série é convergente.

**Nota:** Em muitas situações, diferentes critérios podem favorecer a análise do carácter da série, como no exemplo anterior.

**Exemplo n° 8:** Analise a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}$ .

**Solução:**

Por definição, a série é alternada. Analisemos se $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ é monótona decrescente. De $(n+1)^2 > n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ se conclui que $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ é monótona decrescente, por outro lado, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$ então pelo critério de Leibniz, pode-se concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Também podemos estudar a convergência absoluta da série. Desta feita, a série dos módulos é $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Trata-se de uma série harmónica de ordem 2, portanto é convergente. Assim a série proposta, também converge absolutamente.

**Nota:** A convergência absoluta, é uma particularidade de algumas séries de termos de sinais não todos positivos. Deste modo, nem todas as séries com esta característica convergem absolutamente. Algumas são simplesmente convergentes e outras por sua vez são mesmo divergentes.

**Exemplo n° 9:** Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{((n+1)!)^2}{(2n)!5^n}$. Determine o seu carácter.

**Solução:**

A série é de termos alternantes, por definição. Estudemos a convergência absoluta, recorrendo ao critério de D'Alembert.

A série dos valores absolutos é $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!5^n}$. Seja $a_n = \frac{((n+1)!)^2}{(2n)!5^n}$ então,

$$a_{n+1} = \frac{((n+2)!)^2}{(2(n+1))!5^{n+1}} \Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+2)!)^2}{(2(n+1))!5^{n+1}}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!5^n}} = \lim \frac{((n+2)!)^2(2n)!5^n}{(2(n+1))!5^{n+1}((n+1)!)^2} =$$

$$= \lim \frac{((n+2)!)^2(2n)!}{5(2n+2)(2n+1)(2n)!((n+1)!)^2} = \lim \frac{(n+2)^2((n+1)!)^2}{5(2n+2)(2n+1)((n+1)!)^2} = \lim \frac{(n+2)^2}{5(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{20} < 1$$

Portanto a série converge absolutamente, logo é convergente.

**Exemplo n° 10:** Seja o número racional $0,\bar{5} = 0,5555...$ . Escrevê-lo na forma de fracção.

**Solução:**

Trata-se de uma dízima infinita periódica, cujo período é $5$.

Com efeito,

$$0,\bar{5} = 0,5 + 0,05 + 0,005 + ... = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + ...$$

Portanto, temos uma soma infinita, cujos termos constituem uma progressão geométrica. O termo geral desta progressão é $a_n = \left(\frac{5}{10^n}\right), \quad \forall n \geq 1.$

Assim podemos escrever,

$$0,\bar{5} = 0,5 + 0,05 + 0,005 + ... = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{10^n}\right).$$

A razão do termo geral é $\frac{1}{10} < 1$, portanto a série converge e sua soma é:

$$S = 0,\bar{5} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{10^n}\right) = \frac{\left(\frac{5}{10}\right)}{1-\left(\frac{1}{10}\right)} = \left(\frac{5}{10}\right)\cdot\left(\frac{10}{9}\right) = \frac{5}{9}$$

O exemplo anterior, foi para demonstrar, de alguma forma, a utilização das séries numéricas como ferramenta de solução de certos problemas, no caso no contexto da própria matemática.

**Exercícios propostos**

**I.** Escrever a fórmula do enésimo termo das seguintes séries, de acordo com os termos indicados.

$a)\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ...$ $\qquad c)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + ...$

$b)\ \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + ...$ $\qquad d)\ \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + ...$

**II.** Escrever os quatro primeiros termos da série, partindo do termo geral.

$a)\ a_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$ $\qquad c)\ a_n = \frac{\left(2 + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\cos(n\pi)}{n!}$

$b)\ a_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2}$ $\qquad d)\ a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$

**III.** Escreve na forma de fracção as seguintes dízimas periódicas:

$a)\ 0,324\overline{101}$; $\qquad b)\ 0,\overline{34}$; $\qquad c)\ 1,\overline{345}$.

**IV.** Calcule a soma das séries seguintes:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; $b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^{n+1}}\right)$; $c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^{3n-2}}\right)$;

$d)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\log(n)\log(n+2)}$; $e)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{n-1}}\cdot\frac{2}{5^n}\cdot\frac{3}{6^{n+1}}\right)$; $.f)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+7^n}{3^n.7^n}$

$g)\ \sum\frac{1}{n(n+2)}$

**V.** Determine a natureza das seguintes séries, recorrendo aos critérios de comparação.

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$; $b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$; $c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$; $e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$; $f)\ \frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$

**VI.** Determine a natureza das séries abaixo, usando o critério da razão ou de D'Alembert.

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n\, n!}$; $b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,2^n}{4n^3+1}$; $c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!-n!}{n!(n+1)!}$; $d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n!}{n!+n^n}$;

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!+2^n}$; $f)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!+3n}{((n+1)!)^2}$; $g)\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}+\ldots$

**VII.** Utilizando o critério da raiz ou de Cauchy, investigue o carácter das séries que a seguir de apresentam.

$$a)\ \sum_{n=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2};\qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2};\qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-2}{3n^2}\right)^{n};\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^{n};$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n};\qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{\sqrt{3}n+1}\right)^{n}$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^{\frac{n}{2}};\qquad h)\ \frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\ldots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\ldots$$

**VIII.** Investigue a natureza das séries. Em caso de convergência diga se simples ou absoluta.

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^5}{2^n};\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)}{n^2+4};\qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^5+1}}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right);\qquad d)\ \sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right);$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(n)+2^n}{n+5^n};\qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{n+1}}{n^n};\qquad g)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\qquad h)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(n+1)!}{(n+1)^n};$$

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(2n^2+a\right)}{n!b};\qquad j)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\ (n+1)}};\qquad k)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n};\quad l)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\cdot 2^n+\frac{1}{n^2+n}\right)$$

## Respostas

### Secção I

| | |
|---|---|
| **a)** | $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ |
| **b)** | $a_n=\dfrac{n+2}{(n+1)^2}$ |
| **c)** | $a_n=\dfrac{1}{2n}$ |

| | |
|---|---|
| **d)** | $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ |

**Secção II**

| | |
|---|---|
| **a)** | $\frac{1}{2};\frac{4}{5};\frac{7}{10};\frac{10}{17}$ |
| **b)** | $1;\frac{3}{4};\frac{1}{9};\frac{3}{16}$ |
| **c)** | $-3;1;-\frac{1}{6};\frac{1}{12}$ |
| **d)** | $-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{3}{8};\frac{1}{4}$ |

**Secção III**

| | |
|---|---|
| **a)** | $\frac{323777}{999000}$ |
| **b)** | $\frac{34}{99}$ |
| **c)** | $\frac{1344}{999}$ |

**Secção IV**

| | |
|---|---|
| **a)** | $\frac{1}{2}$ |
| **b)** | $1$ |
| **c)** | $\frac{2}{21}$ |
| **d)** | $\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}$ |
| **e)** | $\frac{480}{119}$ |

| | |
|---|---|
| **g)** | $\frac{3}{4}$ |
| **f)** | $\frac{8}{3}$ |

**Secção V**

| | |
|---|---|
| **a)** | **Convergente** |
| **b)** | **Convergente** |
| **c)** | **Divergente** |
| **d)** | **Convergente** |
| **e)** | **Divergente** |
| **f)** | **Convergente** |

**Secção VI**

| | |
|---|---|
| **a)** | **Convergente** |
| **b)** | **Divergente** |
| **c)** | **Convergente** |
| **d)** | **Convergente** |
| **e)** | **Convergente** |
| **f)** | **Convergente** |
| **g)** | **Converge** |

**Secção VII**

| | |
|---|---|
| a) | Convergente |
| b) | Convergente |
| c) | Convergente |
| d) | Convergente |
| e) | Convergente |
| f) | Divergente |
| g) | Converge |
| h) | Convergente |

**Secção VIII**

| | |
|---|---|
| a) | Converge absolutamente |
| b) | Converge absolutamente |
| c) | Diverge |
| d) | Converge Absolutamente |
| e) | Converge |
| f) | Converge Absolutamente |
| g) | Converge |
| h) | Diverge |
| i) | Converge Absolutamente |
| j) | Diverge |
| k) | Diverge |
| l) | Absolutamente convergente |

## CONCLUSÃO

Da investigação realizada, conclui-se:

- O processo de ensino-aprendizagem, constitui-se na via capaz de assegurar uma melhor construção da personalidade do indivíduo, mediante um conjunto de actividades sistematizadas e realizadas, sob a orientação do docente e em constante interacção, intercâmbio com outros seres humanos;

- O processo de ensino-aprendizagem, converte-se num itinerário essencial, para capacitar o homem, perspectivando a participação activa na resolução dos problemas que a sociedade, de modo geral, enfrenta;

- O estudo das séries numéricas é fundamental para a formação inicial do professor de Matemática nas escolas de formação de professores, uma vez que, também contribui de modo significativo, para o desenvolvimento das capacidades intelectuais, fundamentalmente;

- Em virtude das deficiências constatadas no processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas, nos estudantes do primeiro ano do ensino da matemática, do ISCED-Huambo, o sistema de exercícios proposto com algumas orientações metodológicas para a sua resolução, contribuirão grandemente no desenvolvimento do estudante, quer no contexto da sala de aula, mediante as orientações do docente, quer de modo independente, fora do contexto da sala de aulas; o que vai permitir favorecer, de certa forma, o processo de ensino-aprendizagem das séries numéricas.

.

## RECOMENDAÇÕES

Tendo em conta o trabalho desenvolvido, o autor recomenda:

- Criar condições para que os conteúdos de séries numéricas sejam cada vez mais abordados, visando também estimular o raciocínio lógico aos estudantes do primeiro ano, fundamentalmente;

- Que se realizem sempre investigações, como forma de favorecer cada vez mais o processo de ensino-aprendizagem das temáticas reflectidas na cadeira de Análise Matemática I;

- Aos professores, como orientadores do processo, que trabalhem sempre no aspecto motivação, para favorecer uma participação cada vez mais activa dos estudantes no processo de ensino-aprendizagem;

- Aos estudantes, que haja uma tomada de consciência e uma predisposição para converterem-se em agentes mais activos no seu processo de desenvolvimento.