Elaborado por: Lic. Eleazar J. García
República Bolivariana de Venezuela. Tinaco.- Estado Cojedes

Teoría de Conjuntos y Funciones

Este capítulo comienza con el estudio de las nociones de la teoría de conjuntos y está destinado a exponer temas básicos, que se utilizarán en desarrollos posteriores y que serán fundamentales para comprender lo expuesto en ellos.

Estudiaremos las operaciones: inclusión, intersección, diferencia de conjuntos, etc., y luego extenderemos esos conceptos al conjunto de los números reales donde dichas operaciones son una herramienta imprescindible para calcular el dominio de funciones reales de una variable real.

1.1. Conjunto.

La noción de **conjunto** la aceptamos como sinónimo de las nociones usuales de colección, agrupación de objetos, etc. Los objetos de un conjunto se llaman: miembros o elementos, sin embargo, de éstos dos términos el más usado es "**elemento"**.

Cuando nos referimos a los objetos que componen un conjunto *A*, entonces usamos la palabra **elementos** del conjunto *A*.

1.2. Pertenencia: Lo necesario para dar un conjunto es conocer sus elementos. Estas dos palabras: **conjunto** y **elemento**, están relacionadas por la **pertenencia** o no de un determinado objeto a un determinado **conjunto**.

Las palabras **conjunto** y **elemento** son precisadas por las siguientes reglas:

a) Un conjunto $\boldsymbol{X}$ está bien definido cuando se dispone de un criterio para afirmar que cualquier objeto $\boldsymbol{a}$, pertenece al conjunto $\boldsymbol{X}$ o si no pertenece al conjunto $\boldsymbol{X}$. Si el objeto $\boldsymbol{a}$ pertenece al conjunto $\boldsymbol{X}$ se usa el símbolo de pertenencia "$\in$" escribiendo $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$, el cual se lee *"$\boldsymbol{a}$ pertenece a $\boldsymbol{X}$"* o *"$\boldsymbol{a}$ es un elemento de $\boldsymbol{X}$"*. Si el objeto $\boldsymbol{a}$ no pertenece al conjunto $\boldsymbol{X}$ se usa el símbolo de no pertenencia "$\notin$", así escribimos $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{X}$, el cual se lee *"$\boldsymbol{a}$ no pertenece a $\boldsymbol{X}$"* o *"$\boldsymbol{a}$ no es elemento de $\boldsymbol{X}$"*.

b) Un objeto no puede ser a la vez un conjunto y un elemento de ese conjunto, es decir, no es aceptado que pueda suceder $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{a}$.

1.3. Formas de expresar los conjuntos: Los conjuntos pueden ser expresados de las siguientes formas:

1.3.1. ***Por extensión:*** Cuando se nombran todos y cada uno de sus elementos.

Ejemplos 1.1.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D = \{-4, -2, 0, , 2, 4, 6\}$$

$$E = \{Venezuela, Colombia, Ecuador, Bolivia, Perú\}.$$

1.3.2. *Por comprensión:* Cuando se indica una propiedad que caracteriza a sus elementos.
Ejemplos 1.2.

A = {Las vocales}

$B = \{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 5\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x \leq 5\}$

$D = \{x \in \mathbb{Z} / -4 \leq x \leq 6 \wedge x \text{ } es \text{ } un \text{ } múltiplo \text{ } 2\}$

$E = \{Paises \text{ } libertados \text{ } por \text{ } Simón \text{ } Bolívar\}$.

Como podemos observar en los ejemplos 1.1, se nombran los todos elementos de cada conjunto, mientras que en los ejemplos 1.2 se indicó la característica común a los elementos de cada conjunto.

1.4. Ejercicios propuestos.

Exprese los siguientes conjuntos por comprensión:

1) $A = \{-5, -1, -2, -4, -3, 0, 4, 1, 3, 2\}$
2) $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3) $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
4) $D = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$
5) $E = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$

Exprese los siguientes conjuntos por extensión:

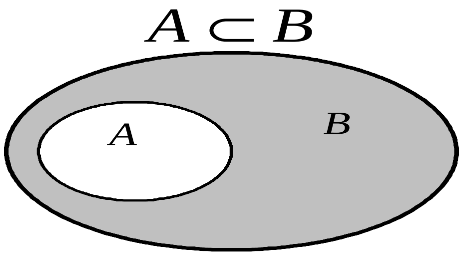
6) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -8 \leq x \leq -3\}$
7) $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 12\}$
8) $C = \{x / x \text{ } es \text{ } par \wedge 9 < x \leq 20\}$
9) $D = \{x / x \text{ } es \text{ } múltiplo \text{ } de \text{ } 3 \wedge 6 \leq x < 31\}$
10) $E = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 18\}$

Los conjuntos pueden ser vinculados entre sí mediante relaciones, las cuales pueden generar otros conjuntos. Consideramos en primer lugar una relación entre conjuntos llamada inclusión.

1.5. Inclusión: Sean *A* y *B* dos conjuntos. El conjunto *A* está incluido en el conjunto *B* si se verifica que cada elemento de *A* pertenece a *B*. Esto se indica de la manera siguiente $A \subseteq B$, que se lee *A* es un subconjunto de *B*.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

Veamos esta relación representada en un diagrama sagital.



Ejemplo 1.3.

Si A = {0, 3, 4, 1} y B = {0,1, 2, 3, 4}, como cada elemento del conjunto A es elemento de B, entonces $A \subseteq B$. Como todos los elementos de A pertenecen a B, se dice, que A esta estrictamente incluido en B.

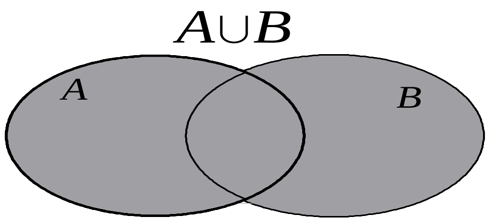
El conjunto vacío, denotado por $\varnothing$ (conjunto que carece de elementos) es subconjunto de cualquier conjunto, es decir, $\forall A, \varnothing \subset A$, y todo conjunto A es subconjunto de sí mismo, esto es, $\forall A, A \subseteq A$.

Si un conjunto A no es un subconjunto de otro B, se indica de la manera siguiente: $A \not\subset B$. Por ejemplo, $C = \{-3, 6, 8, 19\}$ no es un subconjunto de $D = \{-3, 6, 8, 10\}$, puesto que, $19 \notin D$, lo que se expresa así: $C \not\subset D$.

Otras relaciones entre conjuntos son las denominadas unión e intersección de conjuntos, las cuales conoceremos a continuación.

1.6. Unión: Sean A y B dos conjuntos. La unión de A y B es el conjunto formado por los elementos de A o de B o de ambos conjuntos. Se le designa $A \bigcup B$, que se lee A unión B.

$$A \bigcup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$



Ejemplo 1.4.

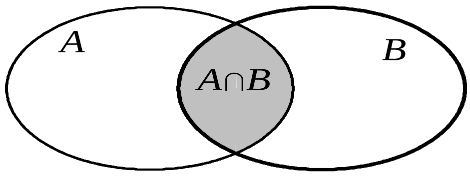
Si A = {0,1, 2, 3, 4} y B = {3, 4, 5, 6, 7, 8}, entonces, $A \bigcup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Es de notar que los elementos de $A \bigcup B$ pertenecen al conjunto A o pertenecen al conjunto B o a ambos si los conjuntos A y B no son disjuntos[1]. Si los conjuntos A y B son disjuntos, entonces los elementos de $A \bigcup B$ pertenecen al conjunto A o al B, pero no a ambos, como

[1] Dos conjuntos A y B son disjuntos si no tienen elementos comunes, es decir, $A \bigcap B = \varnothing$.

es el caso de la unión de los conjuntos $C=\{a,b,c,d\}$ y $D=\{e,f,g,h,i,j\}$, donde evidentemente cada elemento de $C\bigcup D=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ pertenece al conjunto *C* o al *D*.

1.7. Intersección: Sean *A* y *B* dos conjuntos. La intersección de *A* y *B* es el conjunto formado por los elementos comunes a ambos conjuntos. Se le designa $A\bigcap B$, que se lee *A* intersección *B*.

$$A\bigcap B=\{x/x\in A\wedge x\in B\}$$



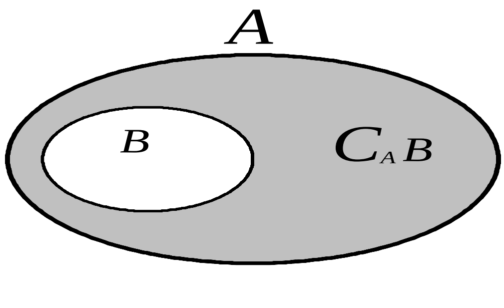
Ejemplo 1.5.

Si *A* = {0, 1, 2, 3, 4} y *B* = {3, 4, 5, 6, 7, 8}, entonces $A\bigcap B=\{3,4\}$. Como podemos evidenciar los elementos de $A\bigcap B$, pertenecen a ambos conjuntos.

La intersección de dos conjuntos disjuntos es ∅, como es el caso de los conjuntos $\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,4,\cdots\}$ y $\mathbb{Z}^-=\{\cdots,-4,-3,-2,-1\}$, para los cuales $\mathbb{Z}^-\bigcap\mathbb{Z}^+=\varnothing$.

1.8. Diferencia: Sean *A* y *B* dos conjuntos tales que $B\subset A$. La diferencia de *A* menos *B* (o complemento de *B* en *A*) es el conjunto formado por los elementos de *A* que no pertenecen a *B*.

$$C_AB=A-B=\{x/x\in A\ \wedge\ x\notin B\}$$



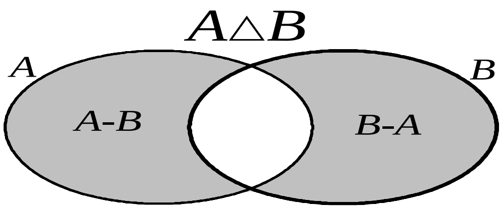
Ejemplo 1.6.

Si $A=\{a,b,c,d\}$ y $B=\{a,c\}$, entonces: $C_A B=A-B=\{b,d\}$. Como podemos observar los elementos del conjunto $C_A B$ son los elementos de *A* que no son elementos de *B*.

El complemento de $\varnothing$ en cualquier conjunto *A* es *A*, es decir, $C_A\varnothing = A.$ Además, $C_A A = \varnothing.$

1.9. Diferencia simétrica: Sean *A* y *B* dos conjuntos tales que $A \cap B \neq \varnothing$. La diferencia simétrica de *A* y *B* es el conjunto formado por los elementos de $(A \cup B) - (A \cap B)$.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



1.10. Ejercicios propuestos.

Hallar la unión, la intersección y el complemento (del primer conjunto respecto al segundo)

1) $A = \{-8, -2, -4, 0, 5, 7, 4\}$ y $B = \{15, -4, 11, -2, -3, 4, 5, -8, 0, 7\}$

2) $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $\mathbb{N}$

3) $\varnothing$ y $E = \{5, 2, 3, 6, 8, 7\}$

4) $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}$

1.11. Cota superior de un conjunto: *k* es una cota superior de un conjunto *C* de números reales, si y sólo si, *k* es un número que no es superado por ningún elemento del conjunto.

$$k \text{ es cota superior de } C \Leftrightarrow \forall x \in C \Rightarrow x \leq k$$

Si *k* es cota superior del conjunto *C*, entonces, cualquier número real mayor que *k* es cota superior de *C*.

El conjunto de los números reales negativos[2] $\mathbb{R}^-$ está acotado superiormente, ya que, cualquier número no negativo[3] es una cota superior de dicho conjunto. Es de citar que si un conjunto tiene una cota superior, tiene infinitas cotas superiores. En el ejemplo anterior, el número 0 es una cota superior, puesto que, cualquier número negativo es menor que 0, además, cualquier número mayor que 0 es una cota superior para $\mathbb{R}^-$.

El conjunto de los números reales no está acotado superiormente, pues, para cualquier número real *k*, siempre existe otro número real $x > k$.

[2] El conjunto de los números reales negativos es el formado por los números reales menores que cero.

[3] El conjunto de los números reales no negativos es el formado por el cero y los números reales mayores que cero.

1.12. Extremo superior o supremo*:* *s* es un extremo superior de un conjunto *C* de números reales, si y sólo si:

1) *s* es una cota superior de *C*, y
2) Si *k* es una cota superior de *C*, entonces $s \leq k$.

"Un extremo superior o supremo de un conjunto C de números reales es la menor de las cotas superiores".

Para el conjunto $\mathbb{R}^-$, 0 es el extremo superior, ya que, el 0 es la menor cota superior de dicho conjunto.

El extremo superior de un conjunto acotado superiormente puede pertenecer o no al conjunto.

En el caso del conjunto $\mathbb{R}^-$, formado por los números reales negativos, el extremo superior 0 no pertenece al conjunto.

Ahora, si consideramos el conjunto de los números reales no positivos[4], el extremo superior también es 0, pero, en éste caso el 0 pertenece al conjunto.

Si consideramos los conjuntos siguientes:

$$A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 5\}$$
$$B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq 5\}$$

Ambos conjuntos están acotados superiormente y el extremo superior para ambos es el número 5, pero $5 \notin A$ y en cambio, $5 \in B$.

1.13. Cota inferior de un conjunto: *h* es cota inferior de un conjunto *C* de números reales si y sólo si es un número real que no supera a ningún elemento de *C*.

$$h \text{ es cota inferior de } C \Leftrightarrow x \in C \Rightarrow x \geq h$$

Si *h* es cota inferior del conjunto *C*, entonces, cualquier número real menor que *h* es cota inferior de *C*.

El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, está acotado inferiormente, pues 0 y todos los números reales menores que 0 son cotas inferiores de $\mathbb{R}^+$.

1.14. Extremo inferior o ínfimo*:* *r* es un extremo inferior de un conjunto *C* de números reales si y sólo si:

1) *r* es una cota inferior de *C*, y
2) Si *h* es una inferior de *C*, entonces $h \leq r$.

"Un extremo inferior de un C de números reales es la mayor de las cotas inferiores".

Un extremo inferior puede pertenecer o no al conjunto.

[4] El conjunto de los números reales no positivos es el conjunto formado por el cero y los números reales menores que cero.

El extremo inferior del conjunto $\mathbb{R}^+$ es 0, pues el 0 es la mayor de las cotas inferiores de $\mathbb{R}^+$.

Consideremos los conjuntos:

$$A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$$
$$B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$$

El conjunto *A* está acotado inferiormente pues 0 y todos los números reales menores que 0 son cotas inferiores de *A*. El número 0 es el extremo inferior de *A*; el conjunto *B* también está acotado inferiormente y tiene como extremo al número 0.

1.15. Conjunto mayorante*:* El conjunto mayorante de un conjunto *A*, es el conjunto formado por todas las cotas superiores de *A*.

1.16. Conjunto minorante*:* El conjunto minorante de un conjunto *A*, es el conjunto formado por todas las cotas inferiores de *A*.

"Un conjunto está acotado si y sólo si admite cota superior y cota inferior".

Ejemplos 1.7.

1) Consideremos el conjunto $A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x < 5\}$

Algunas de las cotas inferiores de *A* son: 0, -1, $-\frac{3}{4}$, $-\sqrt{7}$, etc., el ínfimo de *A* es el número 0. Algunas de las cotas superiores de *A* son: 5, 10, $\frac{10}{9}$, etc. El supremo de *A* es el número 5.

Ahora, como *A* admite cotas inferiores y cotas superiores, entonces es un conjunto acotado.

Además, el conjunto mayorante de *A* es el conjunto $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 5\}$ y, El conjunto minorante de *A* es el conjunto $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0\}$.

2) El conjunto $\mathbb{R}$ es no acotado. No admite cotas inferiores ni superiores.

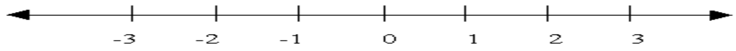
3) Los conjuntos $\mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}^+$ son no acotados, pues el conjunto $\mathbb{R}^-$ no admite cotas inferiores y el conjunto $\mathbb{R}^+$ no admite cotas superiores.

La geometría analítica establece una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales, esto es, a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde un punto único en la recta. Esta correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales facilita la interpretación de muchas demostraciones y es un gran auxiliar para su interpretación.

Gráficamente, para representar una recta se indica un punto origen que corresponde al 0 y otro punto a su derecha para representar al 1, con lo cual queda establecida una escala. La relación de orden definida en $\mathbb{R}$ se interpreta geométricamente considerando que si $b>a$ el punto *b* está a la derecha del punto *a*.

Por la correspondencia entre los números reales y la recta, ésta recibe el nombre de recta real. Seguidamente se muestra dicha recta.

Recta real



En la recta real se verifica que $0 > -3$, puesto que 0 está a la derecha de -3

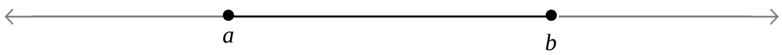
A continuación consideramos otras definiciones útiles, relacionadas con los **intervalos** los cuales son subconjuntos de la recta real.

1.17. Intervalos.

Sea, $a < b,\ a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$

1.17.1. ***El intervalo cerrado*** $[a; b]$, es el conjunto de números reales formado por a, b y todos los comprendidos entre ambos.

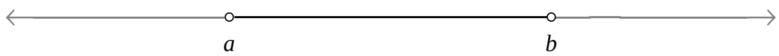
$$[a;b] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$$



La longitud del intervalo $[a; b]$ es el número positivo $b - a$.

1.17.2. ***El intervalo abierto*** $(a; b)$, es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b.

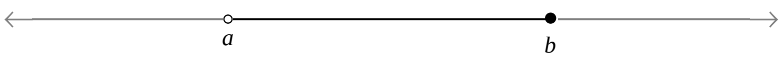
$$(a;b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$$



La longitud del intervalo $(a; b)$ es también el número positivo $b - a$.

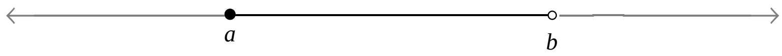
1.17.3. ***El intervalo semiabierto a la izquierda o semicerrado a la derecha*** $(a; b]$, es el conjunto de números reales formado por b y los números comprendidos entre a y b.

$$(a;b] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$$



1.17.4. ***El intervalo semicerrado a la izquierda o semiabierto a la derecha*** $[a; b)$, es el conjunto de números reales formado por a y los números comprendidos entre a y b.

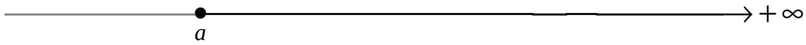
$$[a;b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$$



Las definiciones anteriores se pueden generalizar considerando la semirrecta y la recta como intervalos no acotados, lo que se expresa utilizando los símbolos + ∞ y - ∞. Estos símbolos deben ser considerados con especial atención, recordando que se usan solamente por conveniencia de notación y nunca como números reales.

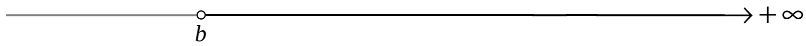
1.17.5. ***El intervalo*** [*a*; + ∞), es el conjunto de números reales formado por *a* y los números mayores que *a*.

$$[a;+\infty)=\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge x\geq a\}$$



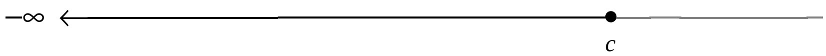
1.17.6. ***El intervalo*** (*b*; + ∞), es el conjunto de números reales mayores que *b*.

$$(b;+\infty)=\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge x>b\}$$



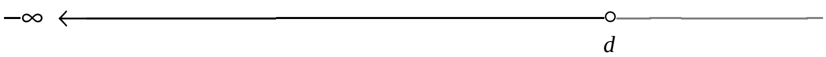
1.17.7. ***El intervalo*** (- ∞; *c*], es el conjunto de números reales formado por *c* y todos los números menores que *c*.

$$(-\infty;c]=\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge x\leq c\}$$



1.17.8. ***El intervalo*** (- ∞; *d*), es el conjunto de números reales menores que *d*.

$$(-\infty;d)=\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge x<d\}$$



La unión y la intersección de conjuntos son operaciones que pueden realizarse dados dos o más intervalos; las operaciones antes mencionadas son de gran utilidad en la determinación del dominio de funciones reales de una variable real.

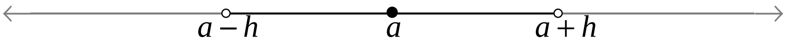
1.18. Entorno.

Si *a* es un punto cualquiera de la recta real y *h* un número positivo, un entorno de centro *a* y radio *h* es el intervalo abierto (*a* – *h*; *a* + *h*). Se le designa E(*a*, *h*).

$$E(a, h) = \{x\,/\,a - h < x < a + h\}$$

ó

E(a, h) = $\{x \,/\, |\, x - a \,| < h\}$



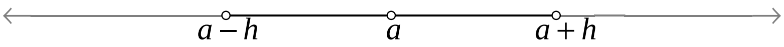
1.19. Entorno reducido.

Si a es un punto cualquiera de la recta real y $h > 0$, el entorno reducido de centro a y radio h es el conjunto de puntos del intervalo abierto ($a - h$; $a + h$) del cual se excluye el punto a. Se le designa E'(a, h).

E'(a, h) = $\{x \,/\, x \neq a \wedge a - h < x < a + h\}$

ó

E'(a, h) = $\{$x / 0 < | x – a | < $h\}$



Un entorno reducido es la unión de los intervalos $(a-h;a)$ y $(a;a+h)$, por lo tanto, podemos considerar E' = $\{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x \in (a-h;a) \cup (a;a+h)\}$

1.20. Punto de Acumulación.

Si C es un conjunto de puntos de la recta real, un punto a es punto de acumulación de C si a todo entorno reducido de a pertenece por lo menos un punto de C. El punto a puede pertenecer o no al conjunto C, pero la definición exige que en cualquier entorno del punto exista por lo menos un punto de C distinto de a.

Ejemplos 1.8.

1) Si el conjunto C es un intervalo cerrado, todos sus puntos son de acumulación.
2) Si el conjunto C es un intervalo abierto, todos sus puntos son de acumulación y también los extremos son puntos de acumulación aunque no pertenecen al conjunto.
3) El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no tiene puntos de acumulación. Si a es cualquier número natural, basta considerar un entorno reducido de centro a y radio $h < 1$ y a ese entorno reducido no pertenece ningún número natural.

1.21. Conjunto Derivado.

El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de un conjunto C es el conjunto derivado de C y se designa C'.

De acuerdo a los ejemplos anteriores:

1) Si $C = [a; b] \Rightarrow C' = [a; b]$
2) Si $C = (a; b) \Rightarrow C' = [a; b]$
3) Si $C = \mathbb{N} \Rightarrow C' = \varnothing$
4) Si $C = [a; b) \Rightarrow C' = [a; b]$

1.22. Teorema 1.1.
Si *a* es un punto de acumulación del conjunto *C*, entonces, cualquier entorno del punto *a* tiene infinitos puntos de *C*.

Ejemplo 1.9.
Sea $A=\{x / x\in \mathbb{R} \wedge x>5\}$, el entorno reducido $\left(5-10^{-5};5\right)\cup\left(5;5+10^{-5}\right)$ de centro 5 y radio 10^{-5}, contiene infinitos puntos de *A*, ya que, todos los puntos en el intervalo $\left(5;5+10^{-5}\right)$ pertenecen al conjunto *A*.

1.23. Teorema 1.2 (de Bolzano-Weierstrass)
Si un conjunto infinito está acotado, entonces, dicho conjunto tiene por lo menos un punto de acumulación.

Ejemplos 1.10.
1) El conjunto $B=\{x / x\in \mathbb{R} \wedge \frac{3}{5}\leq x\leq 6\}$ es un conjunto acotado y todos los puntos en el intervalo $\left[\frac{3}{5};6\right]$ son puntos de acumulación de *B*.
2) Sea el conjunto $C=\{x / x\in \mathbb{R} \wedge -\pi<x<\pi\}$. *C* es un conjunto acotado y tiene infinitos puntos de acumulación, dichos puntos son los del intervalo $\left[-\pi;\pi\right]$.

1.24. Ejercicios propuestos

Representar gráficamente los siguientes conjuntos de números reales. Hallar el máximo, mínimo, conjunto mayorante y el conjunto minorante en cada caso, si existen.

1) $A=\{x / x\in \mathbb{R}\wedge |x|<3\}$
2) $B=\{x / x\in \mathbb{R}\wedge |x|\leq 5\}$
3) $C=\{x / x\in \mathbb{R}\wedge |x|>4\}$
4) $D=\{x / x\in \mathbb{R}\wedge |x-2|\leq 10\}$
5) $E=\{x / x\in \mathbb{R} \wedge (x\in \left(-1;3\right)\vee x=7)\}$
6) $F=\{x / x\in \mathbb{R} \wedge (x\in \left(0;6\right]\vee x=8)\}$

1.25. Conjunto cerrado.
Un conjunto al cual pertenecen todos sus puntos de acumulación se denomina cerrado. Es decir, un conjunto es cerrado, si y sólo si, le pertenecen todos sus puntos de acumulación.

$$C \text{ es cerrado } \Leftrightarrow (a \text{ punto de acumulación de } C \Rightarrow a\in C)$$

Ejemplos 1.11.

1) El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es cerrado pues le pertenecen todos sus puntos de acumulación los cuales son los números reales.

2) Un intervalo cerrado como su nombre lo indica es un conjunto cerrado.

Además, cualquier conjunto que no tiene punto de acumulación es un conjunto cerrado.

En efecto, sea *C* un conjunto que no tiene punto de acumulación. Para que *C* sea un conjunto cerrado debe ser verdadera la siguiente implicación:

"Si *a* es un punto de acumulación de *C*, entonces *a* pertenece a *C*"

Pero hemos supuesto que el conjunto *C* no tiene puntos de acumulación, por lo tanto, el antecedente de dicha implicación es falso y así la implicación es verdadera, pues cualquier implicación con antecedente falso es verdadera[5].

Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son conjuntos cerrados, pues ellos no tienen puntos de acumulación. El conjunto $U = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge x = 5\}$ es un conjunto cerrado, pues no tiene puntos de acumulación.

Un conjunto no es cerrado, si y sólo si, tiene un punto de acumulación que no le pertenece.

C no es cerrado $\Leftrightarrow$ $\exists$ *a* / (a es punto de acumulación de *C* $\wedge$ $a \notin C$

Ejemplos 1.12.

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es cerrado pues sus puntos de acumulación son los números reales y de estos los números irracionales no pertenecen al conjunto $\mathbb{Q}$.

El conjunto $A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 6 < x \leq 11\}$ no es cerrado, ya que, el 6 es un punto de acumulación de *A* y no pertenece a ese conjunto. Además, cualquier intervalo abierto es un conjunto abierto. En general, los intervalos $(a;b), (-\infty;b), (a;+\infty), [a;b)\ y\ (a;b]$, con $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ no son conjuntos cerrados.

1.26. Teorema 1.3

La intersección de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Ejemplos 1.13.

1) Considerando los conjunto cerrados $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, entonces, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ lo verifica que la intersección de éstos dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

2) Dados los conjuntos $A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge -5 \leq x \leq 10\}$ y $B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 5 \leq x \leq 12\}$, luego, $A \cap B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 5 \leq x \leq 10\}$ el cual es un conjunto cerrado.

[5] La lógica proposicional asegura que el valor de verdad de la implicación de una proposición cuyo antecedente es falso es verdadero.

1.27. Teorema 1.4

La unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Ejemplos 1.14.

1) La unión de los conjuntos cerrados $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ es un conjunto cerrado, en efecto, $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ es un conjunto cerrado.
2) Sean los conjuntos $A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge \frac{2}{3} \leq x \leq 9\}$ y $B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 5 \leq x \leq 11\}$, entonces, $A \cup B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge \frac{2}{3} \leq x \leq 11\}$ el cual es un conjunto cerrado
3) La unión de los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\varnothing$ es un conjunto cerrado pues $\mathbb{R} \cup \varnothing = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es cerrado.
4) Dados los conjuntos $C = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x \leq 7\}$ y $D = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 8 \leq x \leq 10\}$, entonces, $C \cup D = \{x / x \in \mathbb{R} \ \wedge \ (-3 \leq x \leq 7 \ \vee \ 8 \leq x \leq 10)\}$.

Una consecuencia del teorema 1.4 es: "la unión de dos intervalos cerrados es un conjunto cerrado". Más aún, la unión de más de dos intervalos cerrados es un conjunto cerrado. En efecto, los conjuntos *A* y *B* del los ejemplos anteriores se pueden expresar en natación de intervalo de las siguientes maneras: $A = \left[\frac{2}{3};9\right]$ y $B = [5;11]$, entonces, $A \cup B = \left[\frac{2}{3};9\right] \cup [5;11] = \left[\frac{2}{3};11\right]$ y éste último es un conjunto cerrado.

1.28. Conjunto compacto.

Un conjunto es compacto, si y sólo si, es un conjunto cerrado y acotado.

Ejemplos 1.15.

1) El intervalo $\left[0;\frac{8}{3}\right]$ es un conjunto compacto, pues es un conjunto cerrado y acotado.
2) El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no es compacto, porque, no está acotado.
3) El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no es compacto por la misma razón que el ejemplo anterior.
4) El conjunto $U = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge x = -7\}$ es un conjunto compacto, ya que, es un conjunto cerrado y acotado.

1.29. Conjunto denso en sí.

Un conjunto es denso en sí, si y sólo si, todos sus puntos son de acumulación.

Ejemplos 1.16.

1) Como todos los puntos del conjunto $\mathbb{R}$ son puntos de acumulación, $\mathbb{R}$ es denso en sí.
2) El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en sí, pues todos sus puntos son de acumulación.
3) Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son conjuntos denso en sí, porque, ninguno de sus puntos son de acumulación.

1.30. Conjunto perfecto.

Un conjunto es perfecto, si y sólo si, es cerrado y denso en sí. Si un conjunto es igual a su conjunto derivado, entonces, es un conjunto perfecto.

Ejemplos 1.17.

1) El conjunto $\mathbb{R}$ es perfecto pues $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$.
2) Cualquier intervalo cerrado es un conjunto perfecto pues $[a;b]' = [a;b]$.
3) El conjunto $\mathbb{Q}$ no es perfecto, pues es denso en sí pero no cerrado.

1.31. Punto interior*:* Un punto $a \in C$, es un punto interior de *C*, si y sólo si, existe un entorno de *a* totalmente incluido en *C*.

Ejemplos 1.18.

1) Con respecto al conjunto $\mathbb{R}$, cualquier número real es interior a $\mathbb{R}$.
2) Un número racional no es interior a $\mathbb{Q}$, porque, todo entorno de un número racional contiene números irracionales que no pertenecen a $\mathbb{Q}$.

1.32. Conjunto abierto.

Un conjunto *C* es abierto, si y sólo si, todos sus puntos son interiores.

Ejemplos 1.19.

1) El conjunto $\mathbb{R}$ es abierto pues todos sus puntos son interiores.
2) El intervalo abierto $\left(-\frac{5}{9};1\right)$ es un conjunto abierto, porque, todos los puntos de dicho intervalo son interiores. Recuerde que los números $-\frac{5}{9}$ y 1 no pertenecen al conjunto.
3) El intervalo $[4;7)$ no es abierto, ya que, cualquier entorno de 4 no está totalmente incluido en $[4;7)$.

Es de observar que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un conjunto abierto y cerrado. Igualmente el conjunto vacío $\varnothing$ es un conjunto abierto y cerrado. Los intervalos $[a;b)$ y $(a;b]$ no son conjuntos ni abiertos ni cerrados.

1.33. Teorema 1.5

La unión de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Ejemplos 1.20.

1) Sean los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\varnothing$. Entonces, $\mathbb{R} \cup \varnothing = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.
2) Consideremos los intervalos: $(2;4)$ y $(3;7)$, luego, $(2;4) \cup (3;7) = (2;7)$ y éste último es un conjunto abierto.

1.34. Teorema 1.6
Si un conjunto es abierto, su complemento es cerrado.

Ejemplos 1.21.
1) El intervalo $\left(-\frac{5}{8};6\right)$ es un conjunto abierto, porque, su complemento es $\left(-\infty;-\frac{5}{8}\right]\cup\left[6;+\infty\right)$ el cual es un conjunto cerrado pues todos sus puntos de acumulación le pertenecen.
2) El conjunto $\mathbb{R}$ es abierto pues su complemente es $\varnothing$ y éste es un conjunto cerrado.
3) El conjunto $\varnothing$ es abierto pues su complemento es $\mathbb{R}$ el cual es un conjunto cerrado.

1.35. Punto aislado*:* Un punto *a*, que pertenece a un conjunto *C*, es un punto aislado, si y sólo si, existe un entorno reducido de *a*, al cual no pertenece ningún punto del conjunto *C*.

Ejemplos 1.22.
1) Todos los números naturales son puntos aislados en el conjunto $\mathbb{N}$.
2) Los números enteros son puntos aislados en el conjunto $\mathbb{Z}$.
3) En el conjunto $C=\left\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge(x>4\vee x=2)\right\}$, 2 es un punto aislado.
4) En el conjunto $D=\left\{x\,/\,x\in\mathbb{Z}\wedge(x=-1\vee x=3)\right\}$, -1 y 3 son puntos aislados.

1.36. Punto adherente*:* Un punto *a* es un punto adherente al conjunto *C*, si y sólo si, a cualquier entorno de *a* pertenece por lo menos un punto de *C*.

Hay que destacar que si un punto pertenece al conjunto, aunque éste sea aislado, es un punto adherente; la definición solamente exige que en todo entorno haya un punto del conjunto que puede ser el centro del mismo.

1.37. Adherencia*:* La adherencia de un conjunto *C*, es el conjunto formado por todos los puntos de adherencia a *C*, y se designa $\overline{C}$.

Ejemplos 1.23.
1) Consideremos el conjunto $C=\left\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge 2<x<9\right\}$. Todos los puntos del intervalo cerrado $\left[2;9\right]$ son puntos adherentes al conjunto *A*, por lo tanto, se tiene que: $\overline{C}=\left\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge 2\le x\le 9\right\}$.
2) Sea el conjunto $B=\left\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge(3\le x\le 7\vee x=0)\right\}$. En este caso $\overline{B}=B$.

1.38. Punto exterior*:* Un punto *a* es exterior a un conjunto *C*, si y sólo si, existe un entorno del mismo al cual no pertenece ningún punto del conjunto *C*.

Ejemplos 1.24.
1) El punto -3 es exterior al conjunto de los números reales positivos.

2) El punto 0 es exterior al segmento $(-4;-2)$.
3) Consideremos el conjunto $D=\{x/x\in\mathbb{R}\wedge 3<x<20\}$. Los puntos -10, -5, -1, 0, 21, 50, son exteriores a *D*.

1.39. Punto frontera: Un punto *a* es punto frontera del conjunto *C*, si y sólo si, en todo entorno del punto *a* hay algún punto que pertenece al conjunto *C* y hay algún punto que pertenece a su complemento.

Ejemplos 1.25.

1) El 0 es frontera para el conjunto de los números positivos y también es frontera para el conjunto de los números negativos.
2) En el conjunto $A=\{x/x\in\mathbb{R}\wedge(2\le x<5\vee x=9)\}$, 2, 5 y 9 son puntos frontera. 2 y 9 pertenecen al conjunto mientras que 5 no pertenece al conjunto.
3) Cualquier punto aislado es un punto frontera.
4) Dado el conjunto $B=\{x/x\in\mathbb{R}\wedge x\le 7\}$, el 7 es un punto frontera de *B*, porque, cualquier entorno de *a* contiene puntos de *B* y del conjunto $\mathbb{R}-B=\{x/x\in\mathbb{R}\wedge x>7\}$, el cual es el complemento de *B* respecto de $\mathbb{R}$.

1.40. Ejercicios propuestos.

1) Dar el conjunto de los puntos interiores de cada conjunto.
$A=(-8;0)$. $B=[1;8]$. $C=(-3;5]$. $D=\{x/x\in\mathbb{R}\wedge|x-6|<9\}$. $E=\{x/x\in\mathbb{R}\wedge|x-3|\le 7\}$.
2) Indicar cuáles de los conjuntos anteriores son cerrados.
3) Indicar cuáles de los conjuntos anteriores son abiertos.
4) Dar el conjunto adherente de los conjuntos anteriores.

En muchas ocasiones debemos representar gráficamente las curvas que se obtienen del estudio y observación de algunos fenómenos naturales, como por ejemplo el crecimiento de una colonia de bacterias, el aumento de temperatura al calentar un cuerpo, etc., también para graficar funciones o curvas de ecuaciones.

Para realizar tales gráficas nos valemos del ***sistema de coordenadas cartesianas*** o ***plano cartesiano***.

1.41. Plano cartesiano

El plano cartesiano o sistema de coordenadas cartesianas está determinado por dos rectas reales, una horizontal y otra vertical, llamadas ejes de **coordenadas** y se cortan entre sí formando cuatro ángulos de 90º cada uno.

El eje horizontal recibe el nombre de **eje *x*** o **eje de las abscisas** y el eje vertical recibe el nombre de **eje *y*** o **eje de las ordenadas**.

El punto donde se cortan ambos ejes recibe el nombre de origen y le corresponde el par ordenado $(0;0)$.

Para un punto $P(x;y)$, *x* e *y* se llaman las coordenadas del punto *P*.

La ubicación de un punto cualquiera del plano se determina midiendo su distancia respecto de los ejes **x** e **y**. Por ejemplo el primer número del par ordenado $(-3;1)$ determina el **desplazamiento horizontal** respecto del origen: positivo para los puntos ubicados a la derecha del origen y negativo para los puntos ubicados a la izquierda; el segundo número del par ordenado determina el **desplazamiento vertical** respecto del origen: positivo para puntos ubicados por encima del origen y negativos para puntos ubicados por debajo.

Plano cartesiano

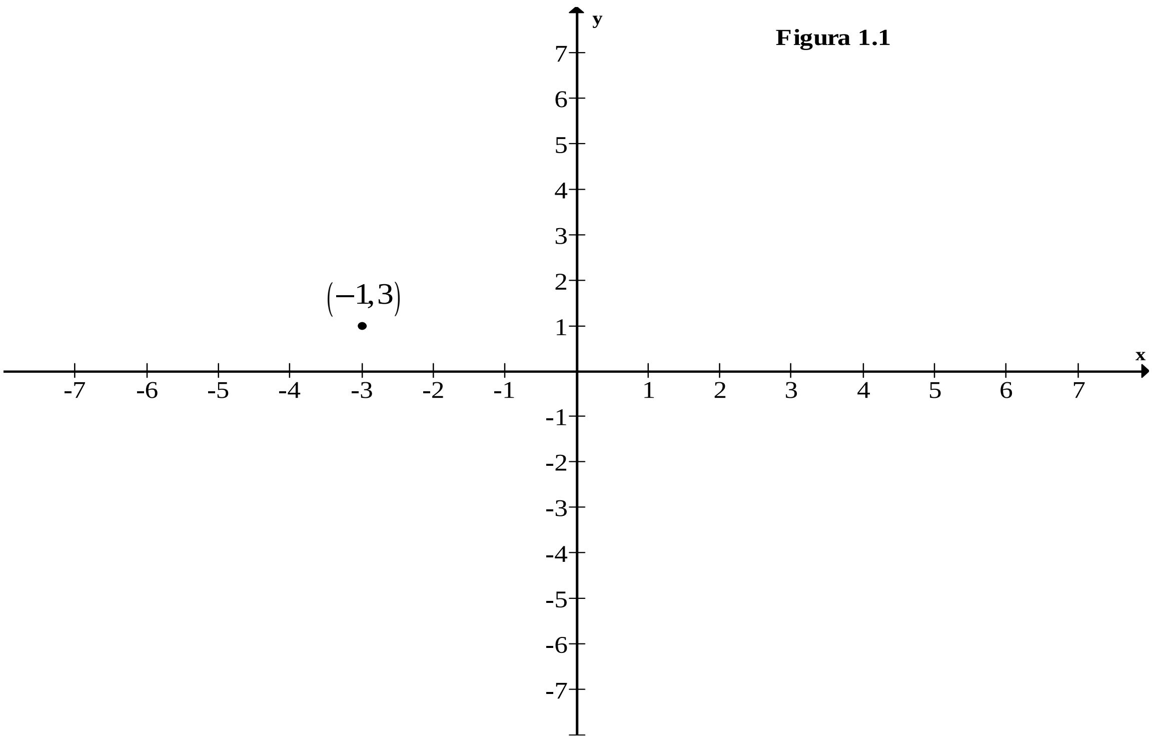


Figura 1.1

En nuestro quehacer matemático, nos encontramos con fenómenos que relacionan dos variables, como es el caso del área de un círculo que puede ser calculado mediante la ecuación $A = \pi r^2$ que relaciona el área con el radio. En el caso descrito el área *A* depende de la medida del radio *r*, y decimos entonces que *A* es una variable dependiente y *r* es una variable independiente.

En nuestro quehacer matemático, nos encontramos con fenómenos que relacionan dos variables, como es el caso del área de un círculo que puede ser calculado mediante la ecuación $A = \pi r^2$ que relaciona el área con el radio. En el caso descrito el área *A* depende de la medida del radio *r*, y decimos entonces que *A* es una variable dependiente y *r* es una variable independiente.

Las relaciones que nos interesan estudiar en éste módulo son las denominadas **funciones**.

1.42. Función.

Una función f de un conjunto X en otro conjunto Y es una correspondencia que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$.

La imagen de x mediante f es denotada $y = f(x)$. El dominio de f es el conjunto X y el rango es el conjunto de todas las imágenes $f(x)$ de los elementos $x \in X$.

Al elemento "x" se le llama variable independiente y al elemento "y" variable dependiente.

Nosotros consideraremos funciones cuyo dominio y rango son conjuntos de números reales, las cuales reciben el nombre de funciones reales de una variable real.

1.43. Función real de una variable real.

Una función real de una variable real, es una función de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ en otro conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, lo que se escribe $f : A \to B$ definida por $y = f(x)$. A la variable independiente "x" se le llama también **abscisa**, y a la variable dependiente "y" **ordenada**.

Una función real de una variable real se puede considerar como un conjunto f de pares ordenados $(x; y)$ de números reales, en el que no pueden existir dos pares distintos con igual abscisa.

Ejemplos 1.26.

1) $f = \{(-2,4),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$, este conjunto es una función, puesto que, no existen pares distintos con igual abscisa.

2) $g = \{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12),(3,15)\}$, este conjunto no es una función, porque, existen dos pares con igual abscisa: $(3,9)$ y $(3,15)$.

1.44. Gráfica de una función.

La gráfica de una función f, es la representación en el plano cartesiano de todos los puntos $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales $(x; y)$ es un par ordenado de f.

1.45. Dominio, rango y gráfica de algunas funciones.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$. El dominio de una función $f : A \to B$, esta formado por los valores que pueda tomar la variable independiente $x \in A$, de manera tal que $y = f(x) \in \mathbb{R}$. El rango es el conjunto formado por todas las imágenes $y = f(x)$ de $x \in A$. Geométricamente, el dominio de una función es la proyección de su gráfica sobre el eje x o eje de las abscisas y el rango es la proyección sobre el eje y o eje de las ordenadas.

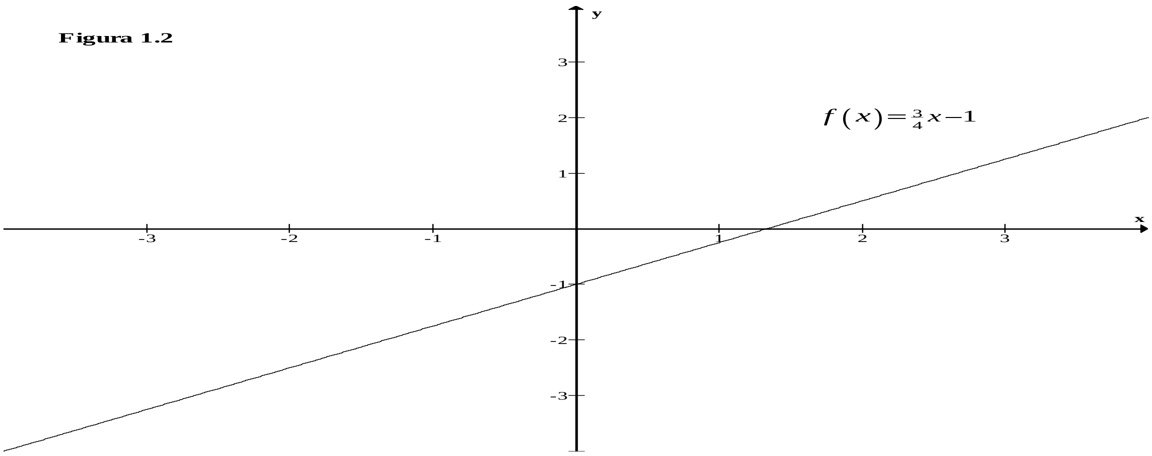
A continuación se presentan algunas funciones elementales con sus respectivos dominios y rangos, y un ejemplo específico con su gráfica para comprobarlos. Todos los ejemplos son relacionados con la función que se esté presentando; se recomiendo tratar de entender las gráficas de todas las funciones porque la compresión de los dominios mediante ese recurso facilitará la determinación de los dominios de funciones compuestas complejas. Trate de memorizar los dominios y los rangos de las funciones presentadas a continuación.

1) $f(x) = ax + b, \quad a \in \mathbb{R} \ \wedge \ b \in \mathbb{R}.$

$$Dom\ f = \{x / x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)\ ,\ Rgo\ f = \{x / x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$$

Ejemplo 1.27. Consideremos la función $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$; su gráfica es mostrada en la figura 1.2; podemos verificar que el dominio es el señalado por definición.

Figura 1.2

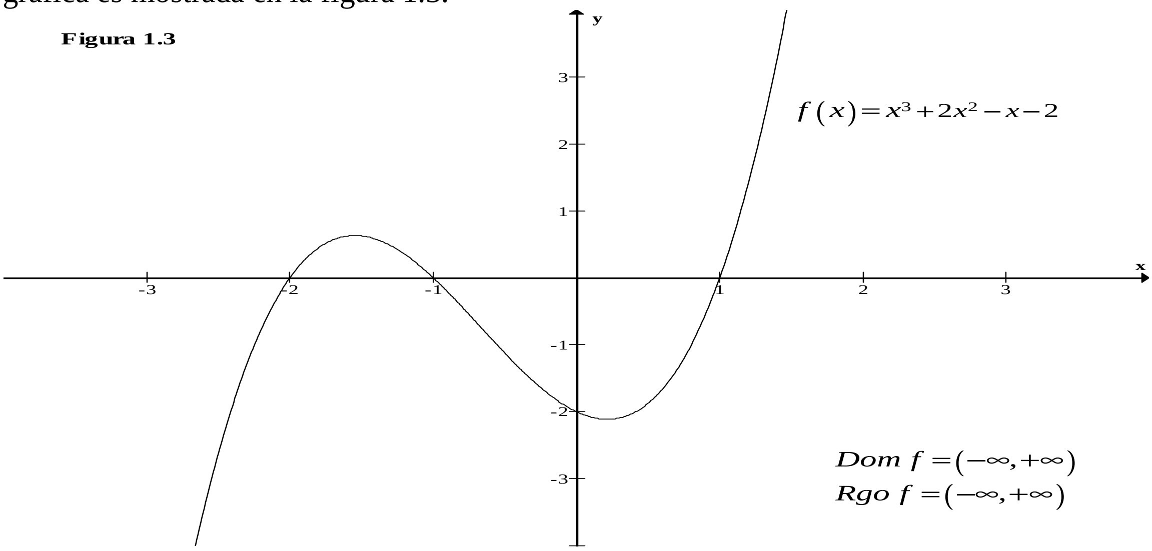


2) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ n \geq 1$

$Dom\ f = \{x / x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$, el rango[6] depende de $n, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ y a_n

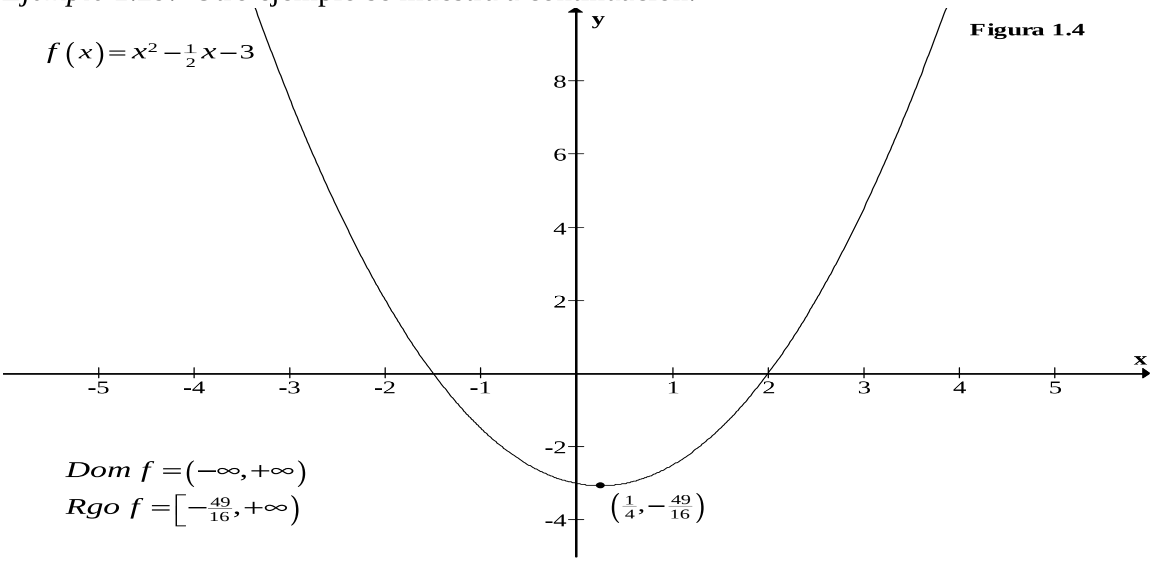
Ejemplo 1.28. Un ejemplo de este caso, es la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ cuya gráfica es mostrada en la figura 1.3.

Figura 1.3



[6] Si n es un número positivo impar: $Rgo\ f = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.29. Otro ejemplo se muestra a continuación.

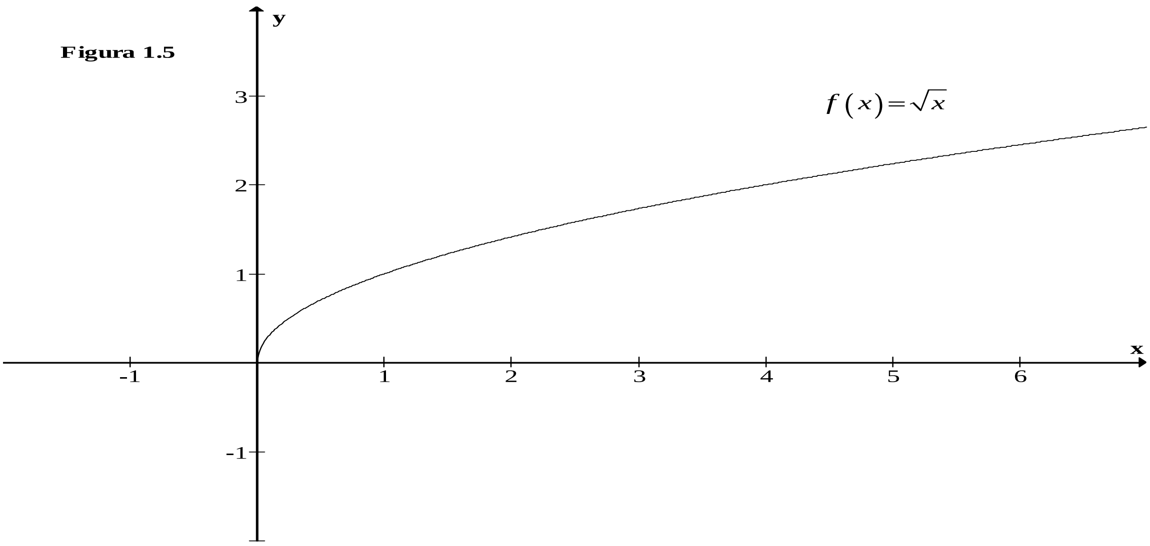


3) $f(x)=\sqrt[n]{x}$.

Si $n\in\mathbb{N}$ es **par** *f* esta definida para toda $x\geq 0$,

$$Dom\ f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0\}=[0;+\infty);\quad Rgo\ f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0\}=[0;+\infty)$$

Ejemplo 1.30. Dada la función $f(x)=\sqrt{x}$ su dominio y su rango son verificados por la figura 1.5, donde se observa que ambos son el conjunto de números reales mayores o iguales que cero.



Si la función es $f(x)=\sqrt[n]{g(x)},\ n\in\mathbb{N}$ y n es par, la función está definida si se cumple la condición $g(x)\geq 0,$ que debe considerarse cuando se determine el dominio de una función en cuya estructura aparece una raíz n-ésima par.

Ejemplo 1.31. Sea $f(x)=\sqrt[6]{2x^3+x^2-2x-1}.$

La condición que debe cumplir ésta función para que sea real es:

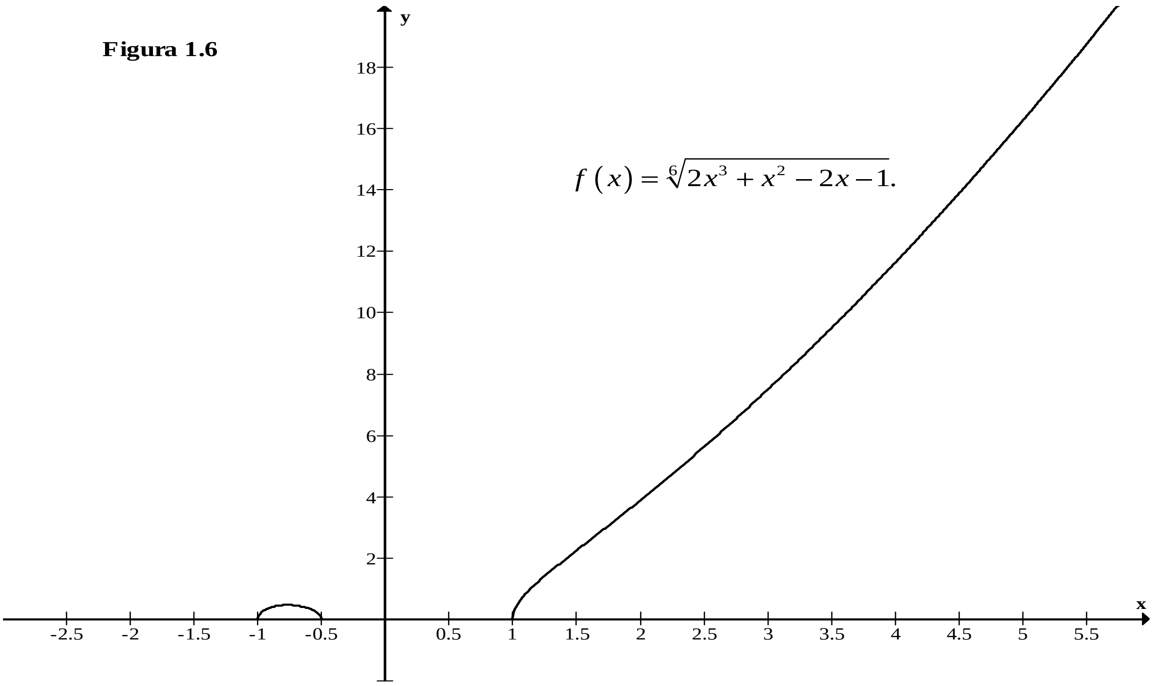
$$2x^3+x^2-2x-1\geq 0 \quad\Rightarrow\quad 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)\geq 0$$

Debemos determinar el conjunto solución de ésta inecuación, el cual será el dominio de la función.

	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$x+\frac{1}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Por lo tanto, $Dom\ f=\left[-1,-\tfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty).$ Véase la figura 1.6.

Figura 1.6

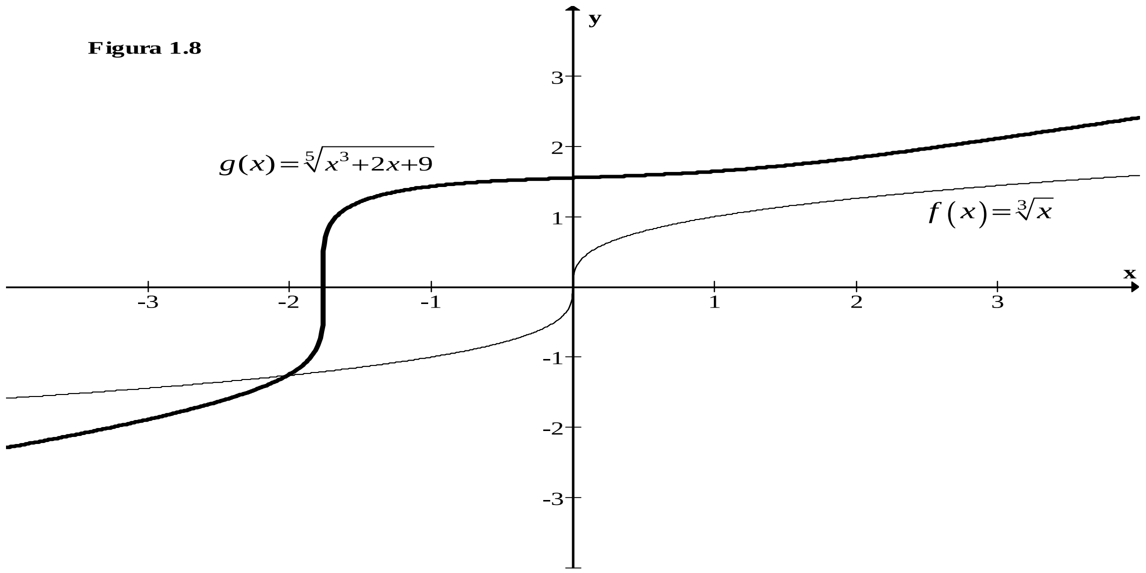


Es evidente, de acuerdo a las figuras 1.5 y 1.6, que el rango de cualquier función raíz n-ésima de índice par $(n\in\mathbb{N},\ \ n>1)$ es: $[0,+\infty).$

Ahora, si $n\in\mathbb{N}$ es **impar** f esta definida para toda $x\in\mathbb{R}$:

$$Dom\ f = (-\infty;+\infty);\quad Rgo\ f = (-\infty;+\infty)$$

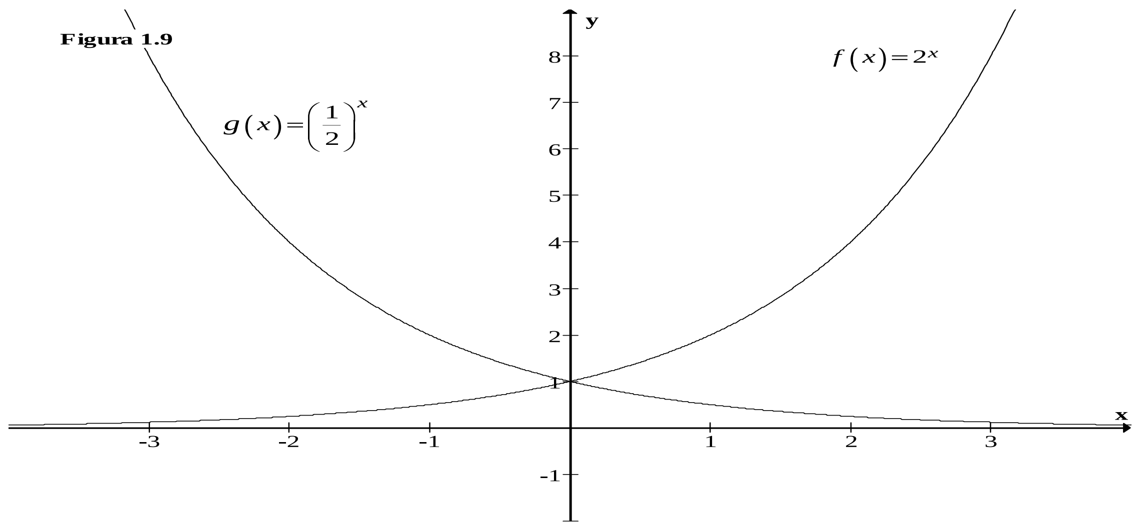
Ejemplo 1.32. El dominio y el rango de las funciones $g(x) = \sqrt[5]{x^3+2x+9}$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y se pueden verificar en la figura 1.8.



4) $f(x) = a^x, \quad a > 0$

$$Dom f = (-\infty;+\infty);\quad Rgo\ f = (0;+\infty)$$

Ejemplo 1.33. Mediante las gráficas de las funciones $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = 2^x$ mostradas en la figura 1.9 podemos comprobar el dominio y el rango de las funciones exponenciales.

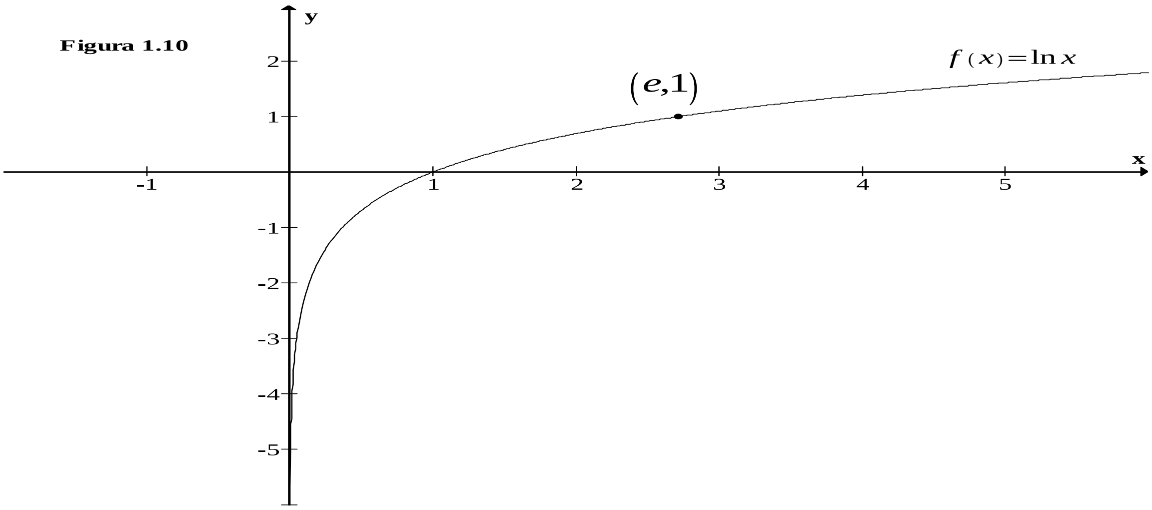


5) $f(x) = \ln x$

$$Dom\ f = (0; +\infty); \quad Rgo\ f = \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.34. En la figura 1.10 se presenta grafica de la función $f(x) = \ln x$. De la figura podemos afirmar que el dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los números reales mayores que cero y el rango el conjunto de los números reales.

Figura 1.10

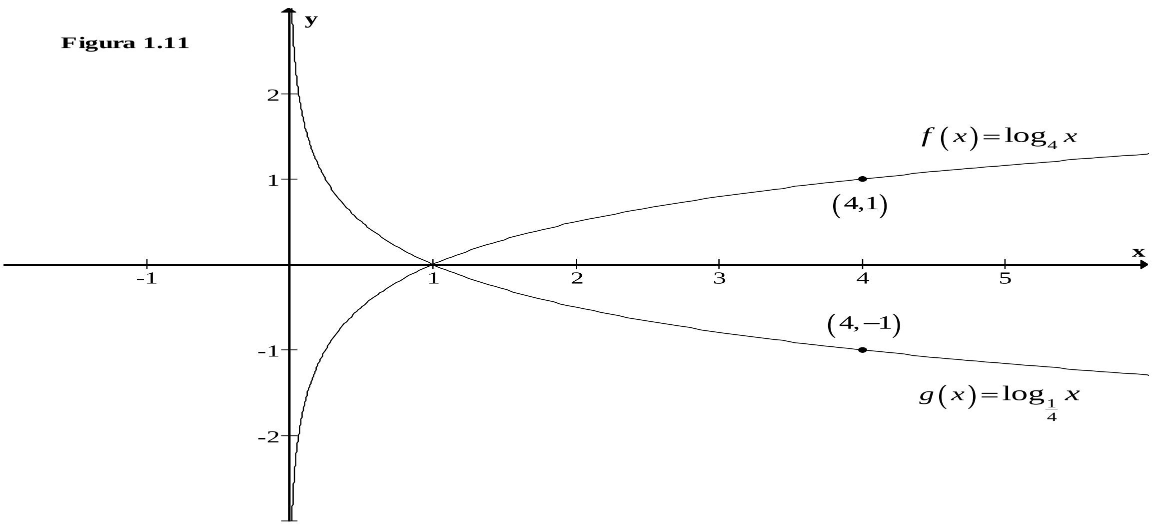


6) $f(x) = \log_b [g(x)], \ b \in (0,1) \cup (1, +\infty).$

$$Dom\ f = (0; +\infty); \quad Rgo\ f = \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.35. Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_4 x$ y $g(x) = \log_{1/4} x$, nos indican que el dominio de cualquier función logarítmica es el conjunto de los números reales mayores que cero y el rango $\mathbb{R}$. Esta afirmación la podemos confirmar observando la figura 1.11.

Figura 1.11



En general, la función $f(x)=\log_b\left[g(x)\right]$, $b\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, es real para toda $x\in\mathbb{R}$ tal que $g(x)>0$.

Ejemplo 1.36.

Sea $f(x)=\log_5\left(x^4+2x^3-19x^2-8x+60\right)$; esta función está definida para todo número real *x* que verifica la siguiente inecuación:

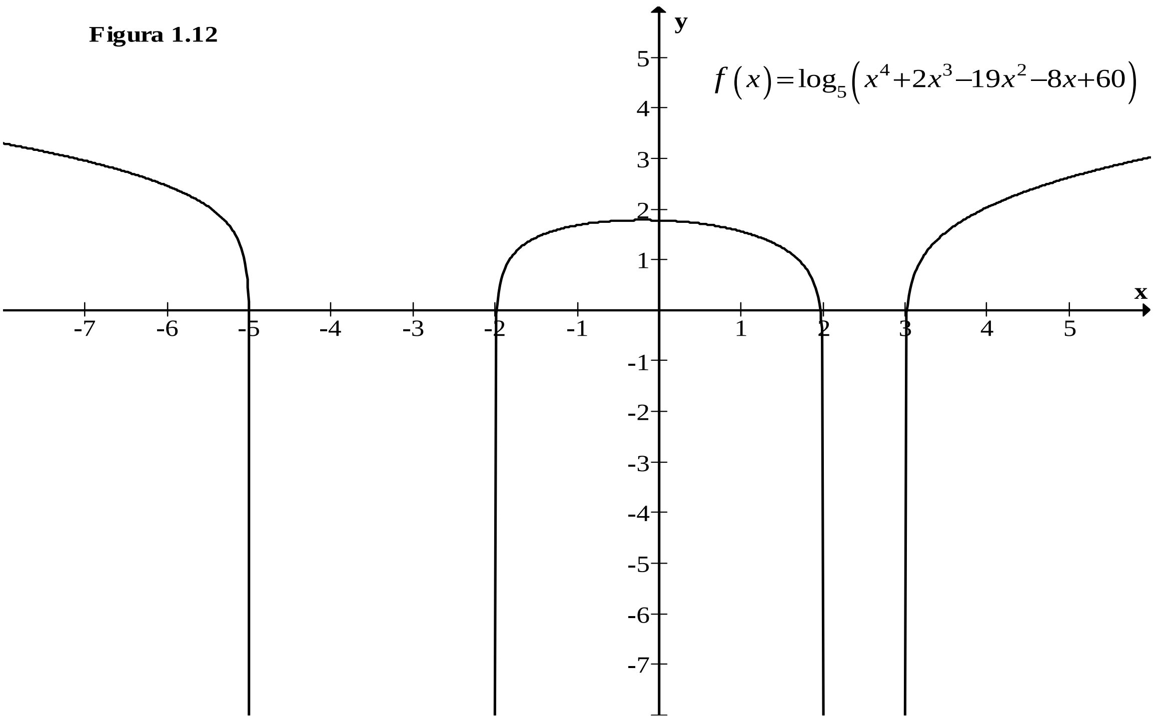
$$x^4+2x^3-19x^2-8x+60>0 \quad\Rightarrow\quad \underbrace{(x+2)(x-2)(x+5)(x-3)}_{\mathbf{I}}>0$$

Determinemos el conjunto solución de ésta inecuación.

	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
I	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Entonces, $Dom\ f=(-\infty;-5)\cup(-2,2)\cup(3,+\infty)$. Además, $Rgo\ f=\mathbb{R}$.
Véase la siguiente gráfica.

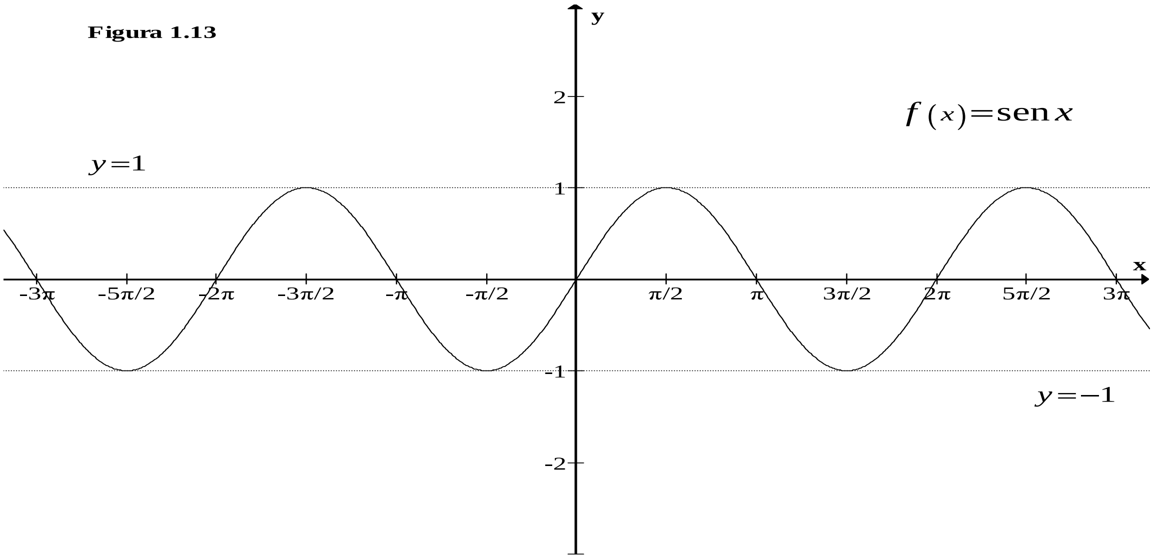
Figura 1.12



7) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$Dom\ f = (-\infty; +\infty); \quad Rgo\ f = [-1;1]$$

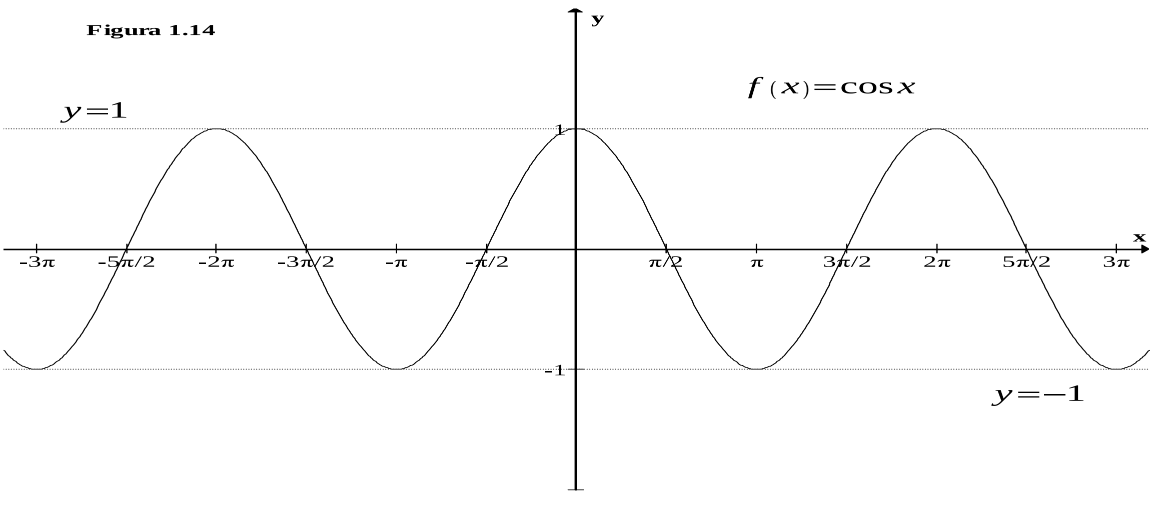
Ejemplo 1.38. El dominio y el rango de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se pueden verificar observando la figura siguiente:



8) $f(x) = \cos x$

$$Dom\ f = (-\infty; +\infty); \quad Rgo\ f = [-1;1]$$

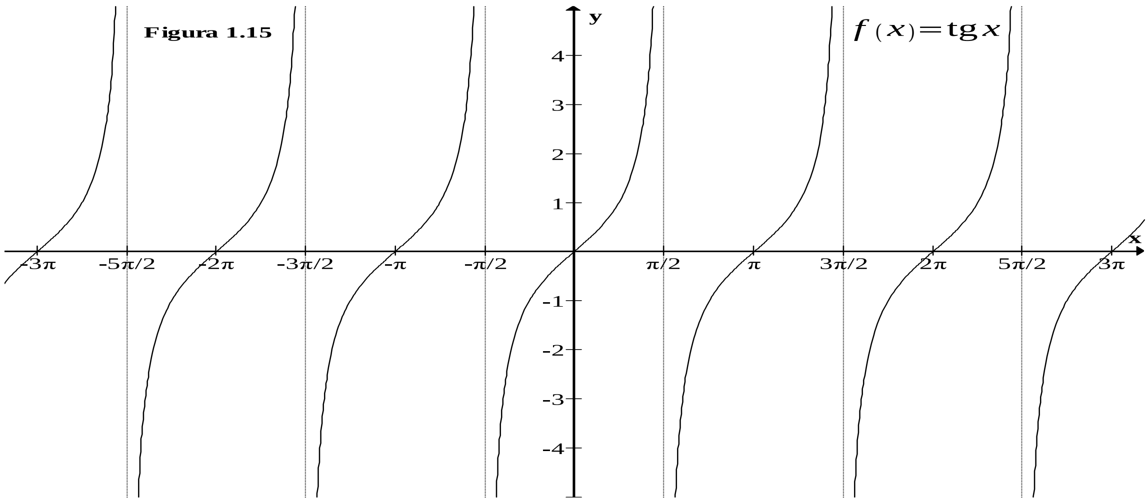
Ejemplo 1.39. En la figura 1.14 se observa que el dominio de $f(x) = \cos x$ es el conjunto de todos los números reales y el rango el intervalo $[-1;1]$.



9) $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$Dom\ f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \left(\frac{2k+1}{2} \right)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}; \quad Rgo\ f = \mathbb{R}$$

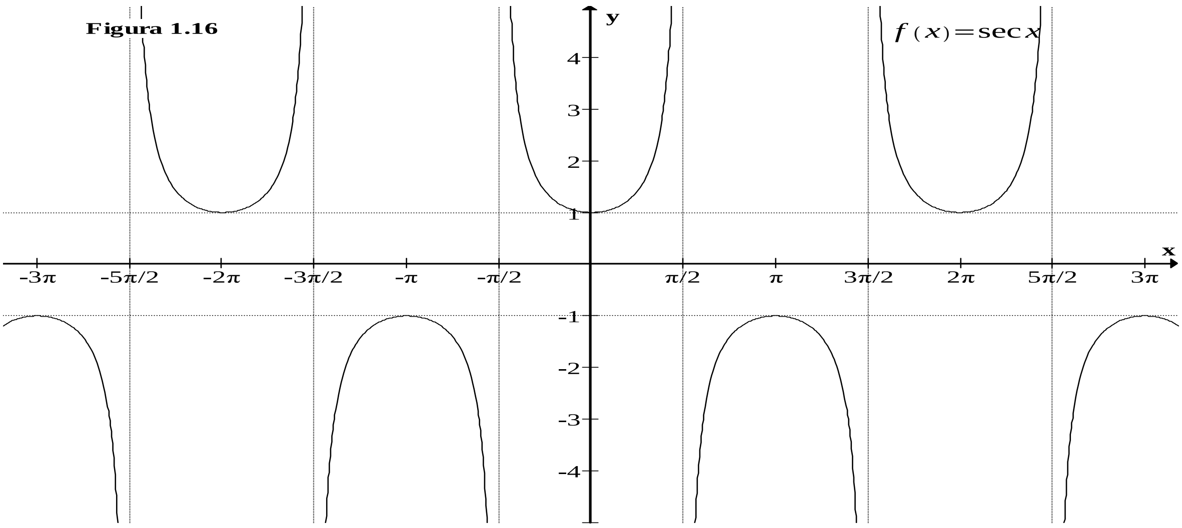
Ejemplo 1.40. El dominio y el rango de la función $f(x) = \operatorname{tg} x$, los podemos verificar mediante la figura siguiente:



10) $f(x) = \sec x$

$$Dom\ f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \left(\frac{2k+1}{2} \right)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad Rgo\ f = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

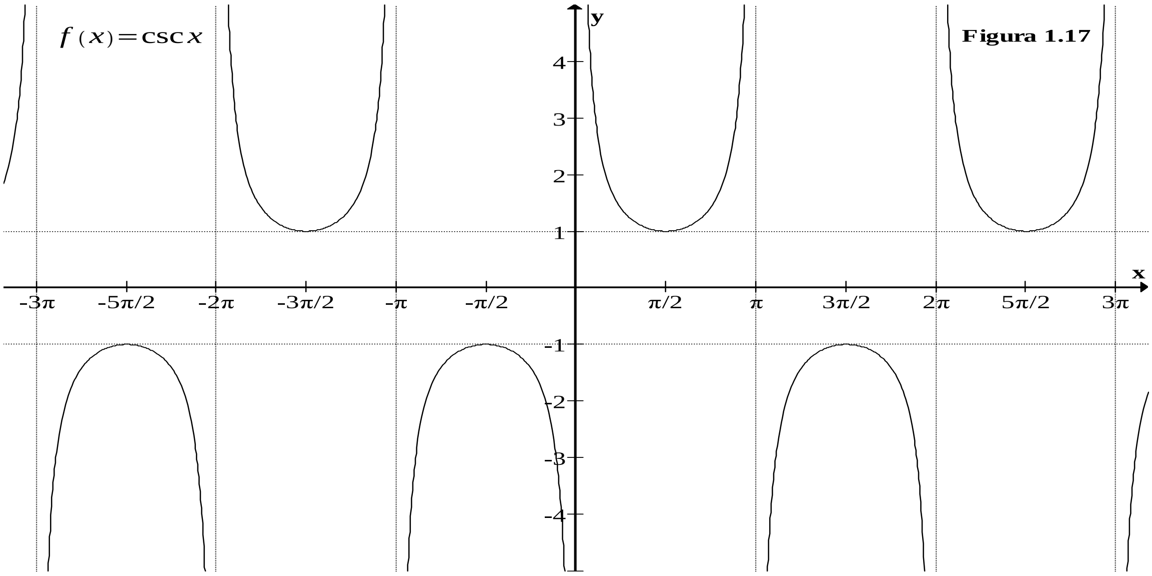
Ejemplo 1.41. A partir de la figura 1.16, podemos verificar el dominio y el rango de $f(x) = \sec x$.



11) $f(x) = \csc x$

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq (k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad Rgo\ f = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

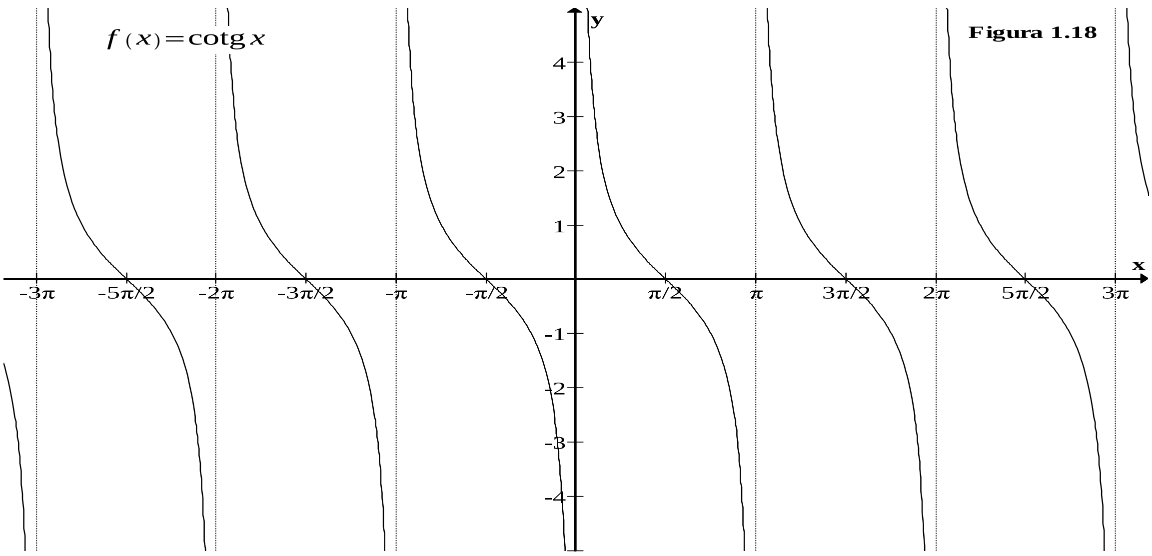
Ejemplo 1.42. El dominio de la función $f(x) = \csc x$ lo podemos comprobar en la figura 1.17.



12) $f(x) = \text{cotg}\, x$

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq (k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad Rgo\ f = \mathbb{R}$$

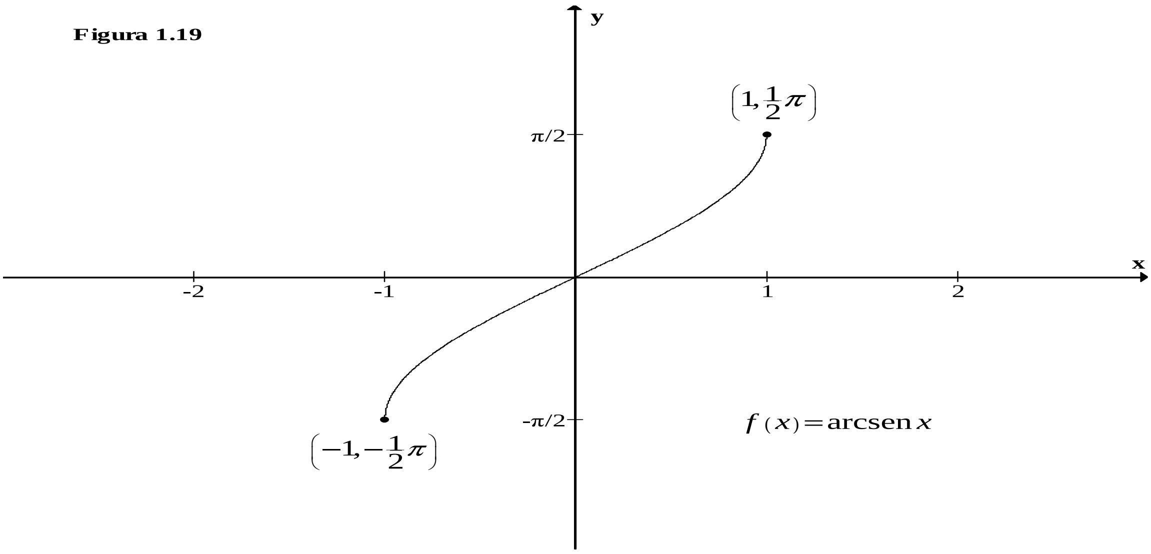
Ejemplo 1.43. La gráfica de la función $f(x) = \text{cotg}\, x$ se muestra en la figura 1.18. En dicha gráfica se observa el dominio señalado para ésta función.



13) $f(x) = \text{arcsen}\, x$

$$Dom\ f = [-1;1];\quad Rgo\ f = [-\tfrac{1}{2}\pi; \tfrac{1}{2}\pi]$$

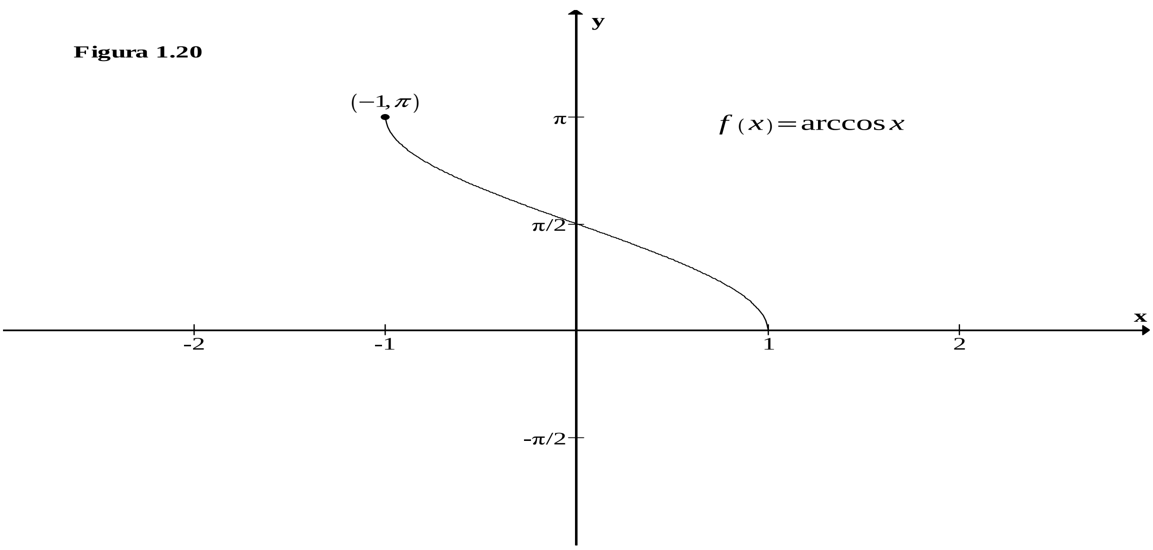
Ejemplo 1.44. El dominio y el rango de la función $f(x) = \text{arcsen}\, x$ son verificados por la gráfica, mostrada en la figura siguiente:



14) $f(x) = \arccos x$

$$Dom\ f = [-1;1];\quad Rgo\ f = [0;\ \pi]$$

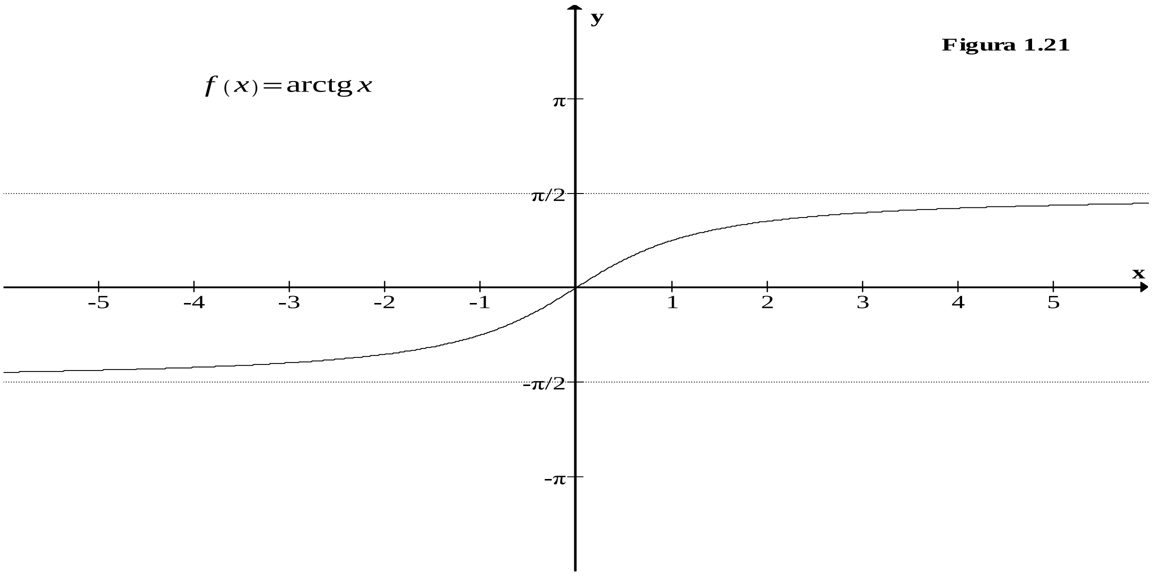
Ejemplo 1.45. La gráfica de la función $f(x) = \arccos x$ verificamos que el dominio y el rango son los intervalos señalados.



15) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$Dom\ f = (-\infty; +\infty);\quad Rgo\ f = \left(-\tfrac{1}{2}\pi; \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

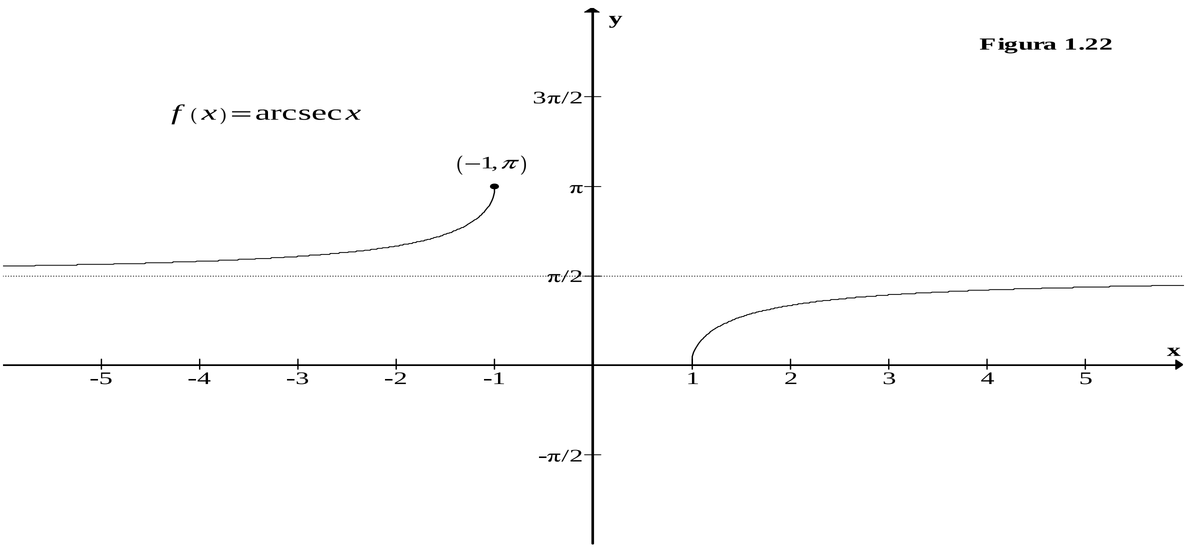
Ejemplo 1.46. En figura 1.21 podemos verificar que el dominio de $f(x) = \operatorname{arctg} x$ es $\mathbb{R}$ y el rango el intervalo $\left(-\tfrac{1}{2}\pi; \tfrac{1}{2}\pi\right)$,



16) $f(x) = \operatorname{arc\,sec} x$

$$Dom\ f = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty);\quad Rgo\ f = \left[0; \tfrac{1}{2}\pi\right) \cup \left(\tfrac{1}{2}\pi; \pi\right]$$

Ejemplo 1.47. La figura 1.22 muestra la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{arc\,sec} x$. Obsérvese que el dominio y el rango son los señalados.

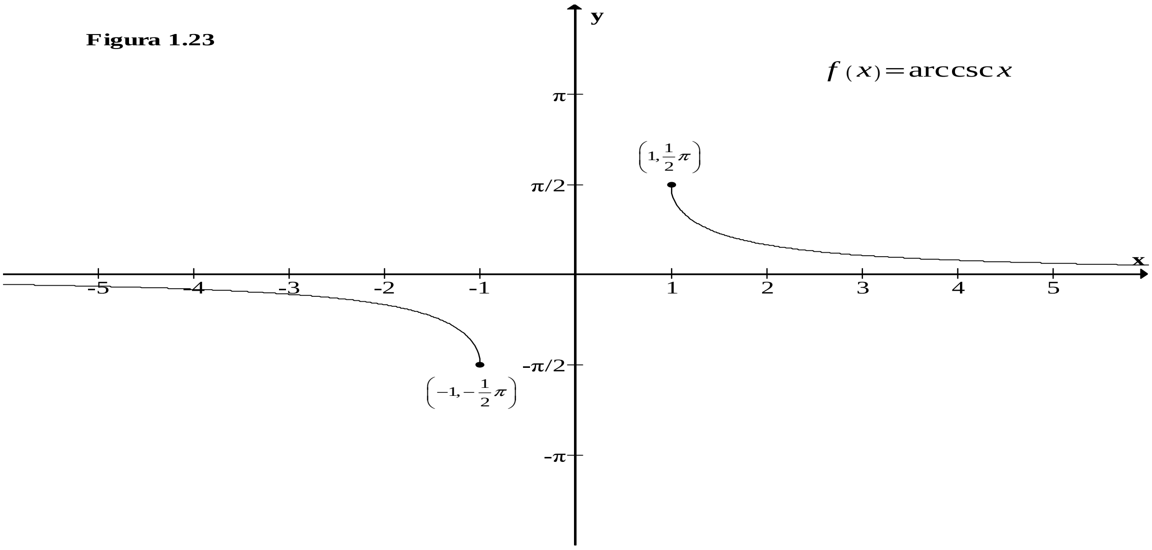


17) $f(x)=\operatorname{arc}\csc x$

$$Dom\ f=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty);\quad Rgo\ f=[-\tfrac{1}{2}\pi;0)\cup(0;\tfrac{1}{2}\pi]$$

Ejemplo 1.48. La gráfica de la función $f(x)=\operatorname{arc}\csc x$ se muestra en la figura siguiente y se verifican el dominio y el rango señalado.

Figura 1.23

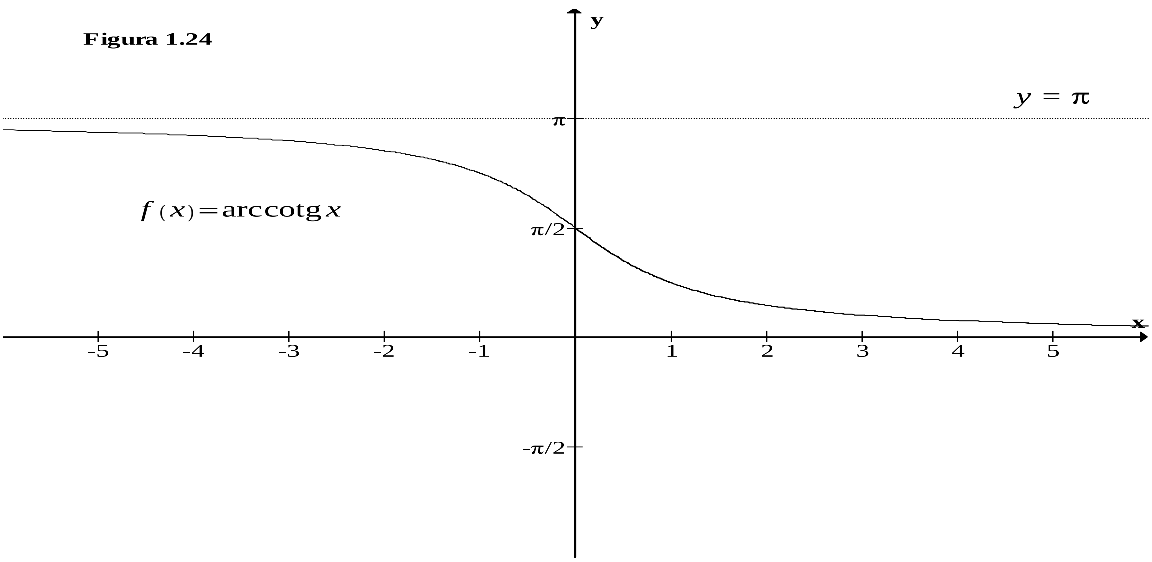


18) $f(x)=\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x$

$$Dom\ f=(-\infty;+\infty);\quad Rgo\ f=(0;\pi)$$

Ejemplo 1.49. El dominio y el rango de $f(x)=\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x$ se pueden verificarse a través de la siguiente figura:

Figura 1.24

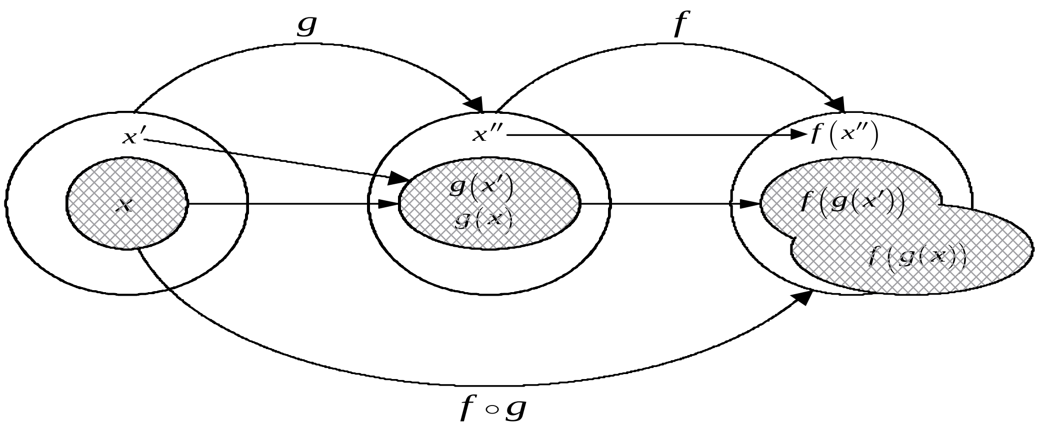


Con éstas nociones, podemos determinar el dominio de funciones en las que en su estructura se encuentren involucradas funciones como las expuestas anteriormente, como es el caso de las funciones compuestas.

1.49. Función Compuesta.

Sean *f* y *g* dos funciones tales que el rango de *g* está en el dominio de *f*. Entonces, la función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama **función compuesta** de *f* con *g*.

Figura 1.25



Ejemplo 1.28.

Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ y $g(x)=(4x+5)^2$, hallar $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Solución: como $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, tenemos que

$f(g(x))=\sqrt{(g(x))^2+1}=\sqrt{\left((4x+5)^2\right)^2+1}=\sqrt{(4x+5)^4+1}$ y como $g(x)=(4x+5)^2$,

resulta,

$$g(f(x))=(4f(x)+5)^2=\left(4\sqrt{x^2+1}+5\right)^2=16\left(x^2+1\right)+40\sqrt{x^2+1}+25$$

$$g(f(x))=16x^2+40\sqrt{x^2+1}+41.$$

Nótese que $f(g(x)) \neq g(f(x))$. Esto es, la composición de funciones no es conmutativa

Ejemplos 1.50.

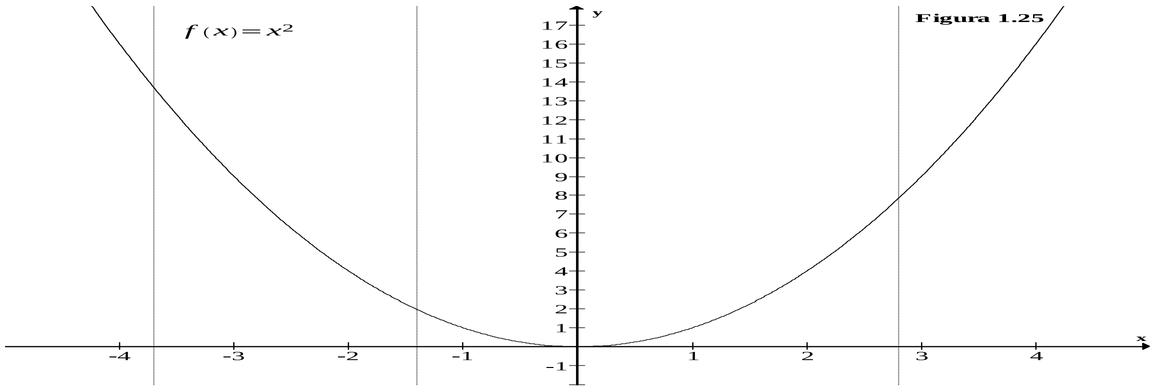
1) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$. El dominio de *f* es el conjunto $\mathbb{R}$ y el rango es el conjunto $[0;+\infty)$. La gráfica de ésta función es mostrada en la figura 1.25.

Se han trazado tres rectas, y todas cortan la gráfica en un sólo punto, y esto sucede únicamente cuando la curva es representativa de una función.

Es de observar que a cada número del dominio de *f* le corresponde solamente un número del rango, esto es cumpliendo la definición de función.

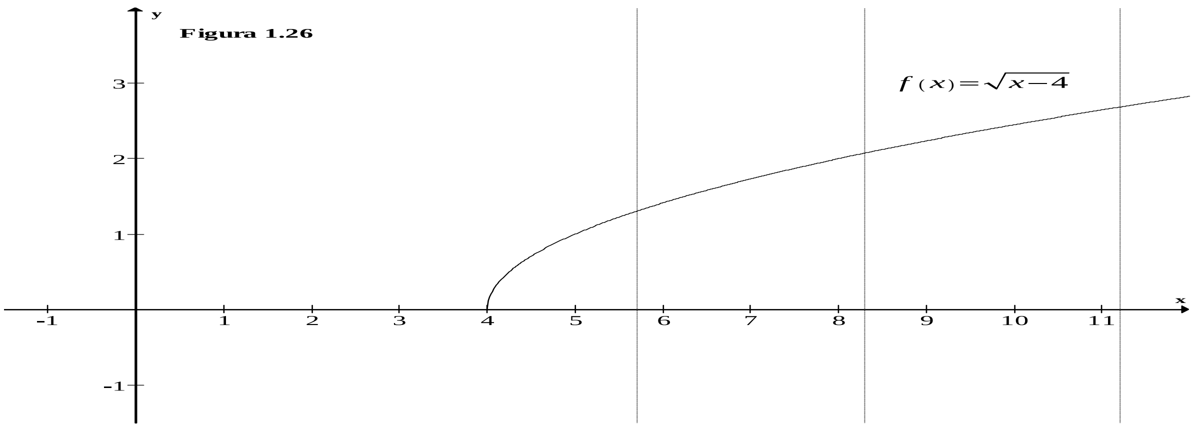
Además, de la gráfica se puede observar que a cada elemento del rango de la función le corresponden más de un elemento del dominio; éste es el caso de las funciones sobreyectivas, concepto que estudiaremos más adelante.

Entonces, se puede afirmar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$, es una función sobreyectiva.



La función *f* es el conjunto de pares ordenados (*x*; *y*) para los cuales $y=x^2$; es decir, $f=\{(x;y)/\,y=x^2\}$. Algunos de los pares ordenados de *f* son: $(-1;1),(1;1),(5;25),(\sqrt{2};2)$.

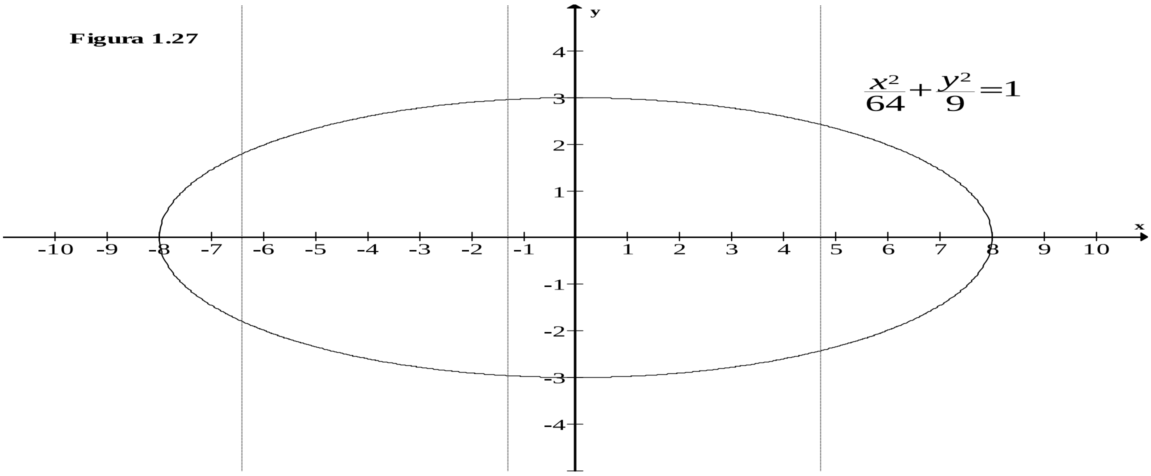
2) Sea la función $g:[4;+\infty)\to[0;+\infty)$ definida por $g(x)=\sqrt{x-4}$.
Para que la función *g* tenga imagen real, se debe verificar: $x-4\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq 4$. Por lo tanto, el dominio de *g* es el conjunto $[4;+\infty)$ y el rango el conjunto $[0;+\infty)$. La gráfica de *g* se muestra en la figura 1.26. También, se han trazado tres rectas verticales y como podemos ver cada una interfecta a la curva solamente en un punto.



La función *g* consta de todos los pares ordenados (*x*; *y*) donde $y=\sqrt{x-4}$; esto es, $g(x)=\{(x;y)/\,y=\sqrt{x-4}\}$. Algunos puntos que pertenecen a *g* son: $(4;0);(5;1);(10;\sqrt{6})$.

Hay que destacar que en toda función existe un sólo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente del dominio de la función.

Consideremos el conjunto $\left\{ (x;y) / \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$, cuya gráfica es una elipse de centro en el origen, mostrada en la figura 1.27.



Observe, que la elipse es intersectada por cualquier recta vertical en dos puntos distintos, por lo tanto, cualquier elipse no es la gráfica de función alguna.

Geométricamente, esto significa que:
"Una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más en un punto".

Observe que en las figuras 1.25 y 1.26, cualquier recta vertical intersecta a cada gráfica a lo sumo en un sólo punto.

1.46. Determinando dominios.

a) Halle el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\ln(x+10)}$.

Solución: *f* debe verificar las siguientes condiciones,

i) $x^2 - 16 \geq 0$

ii) $x + 10 > 0$

iii) $\ln(x+10) \neq 0$

Determinemos el conjunto solución de cada condición:

i) $x^2 - 16 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x+4)(x-4) \geq 0$,

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,4)$	4	$(4,+\infty)$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+4)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Entonces, $\mathbf{S}_1 = (-\infty,-4] \cup [4,+\infty)$

ii) $x + 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -10$

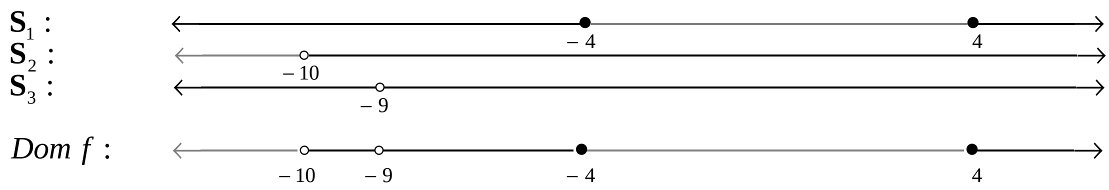
Consecuentemente, $\mathbf{S}_2 = (-10, +\infty)$

iii) $\ln(x+10) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\ln(x+10)} \neq e^0 \quad \Rightarrow x+10 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq -9$

Lo que implica que, $\mathbf{S}_3 = (-\infty, -9) \cup (-9, +\infty)$

Ahora, el dominio es:

$$Dom\ f = \mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 \cap \mathbf{S}_3$$



Por lo tanto, $Dom\ f = (-10, -9) \cup (-9, -4) \cup (4, +\infty)$.

b) Determine el dominio de $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x-3}}$.

Solución: las condiciones que *g* debe cumplir son:

i) $\dfrac{1-x}{x-3} \geq 0$

ii) $x-3 \neq 0$

Hallemos los conjuntos solución:

i) $\dfrac{1-x}{x-3} \geq 0$

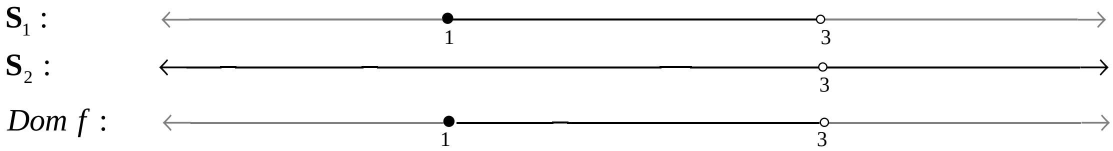
	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$1-x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{1-x}{x-3}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

Entonces, $\mathbf{S}_1 = [1, 3)$

ii) $x-3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 3$

Luego, $\mathbf{S}_2 = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

El dominio se determina mediante: $Dom\ f = \mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$



Por lo tanto, $Dom\ g = [1, 3)$

c) Encuentre el dominio de $h(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{|x-4|-5}}$.

Solución: para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $(x+1) \in \mathbb{R}$. Para que $h(x) \in \mathbb{R}$, debe satisfacer las siguientes condiciones,

i) $|x-4|-5 \geq 0$

ii) $\sqrt{|x-4|-5} \neq 0$

Determinemos el conjunto solución de cada condición:

i) $|x-4|-5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x-4| \geq 5 \quad \Rightarrow \begin{cases} x-4 \geq 5 \quad \Rightarrow \quad x \geq 9 \\ -(x-4) < 5 \quad \Rightarrow \quad -x+4 < 5 \quad \Rightarrow \quad -1 < x \end{cases}$

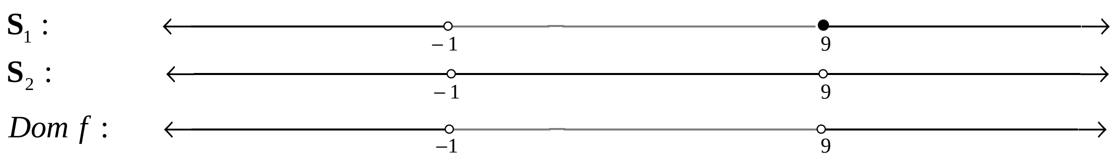
Por consiguiente, $\mathbf{S}_1 = (-\infty, -1) \cup [9, +\infty)$.

ii) $\sqrt{|x-4|-5} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |x-4|-5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |x-4| \neq 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4 \neq 5 \quad \Rightarrow \quad x \neq 9 \\ -(x-4) \neq 5 \quad \Rightarrow \quad -x+4 \neq 5 \quad \Rightarrow x \neq -1 \end{cases}$$

Luego, $\mathbf{S}_2 = (-\infty, -1) \cup (-1, 9) \cup (9, +\infty)$.

El dominio de *h* se determina así: $Dom\, h = \mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$



Por lo tanto, $Dom\ f = (-\infty, -1) \cup (9, +\infty)$.

d) Halle el dominio de $f(x) = \operatorname{tg}(x-4)$.

Solución: $f(x) \in \mathbb{R}$, siempre que $x - 4 \neq \left(\dfrac{2k+1}{2}\right)\pi, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$\Rightarrow x \neq \left(\dfrac{2k+1}{2}\right)\pi + 4, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$

Por ende, $Dom\ f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \left(\dfrac{2k+1}{2}\right)\pi + 4,\ \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$.

1.47. Ejercicios propuestos.

Determine el dominio de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-5x+6}+\ln(x+4)-\sqrt{x^2+3x+2}$ 2) $g(x)=\log\left[2\ln^2(x)+3\ln(x)-1\right]$

3) $h(x)=\sqrt[4]{\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)-1}$ 4) $F(x)=\sqrt{\operatorname{sen} x}+\ln\left(\dfrac{2x+6}{3x-2}\right)$ 5) $G(x)=\log\left(\dfrac{2}{2+\sec x}\right)$

.

1.48. Criterios de simetría.

La gráfica de una función *f* es:

i) Simétrica con respecto al eje *y* si y sólo si se obtiene una función equivalente al sustituir *x* por – *x* en la función *f*.

ii) Simétrica con respecto al origen si y sólo si se obtiene una función equivalente cuando se sustituye *x* por – *x* y *y* por – *y* en la función *f*.

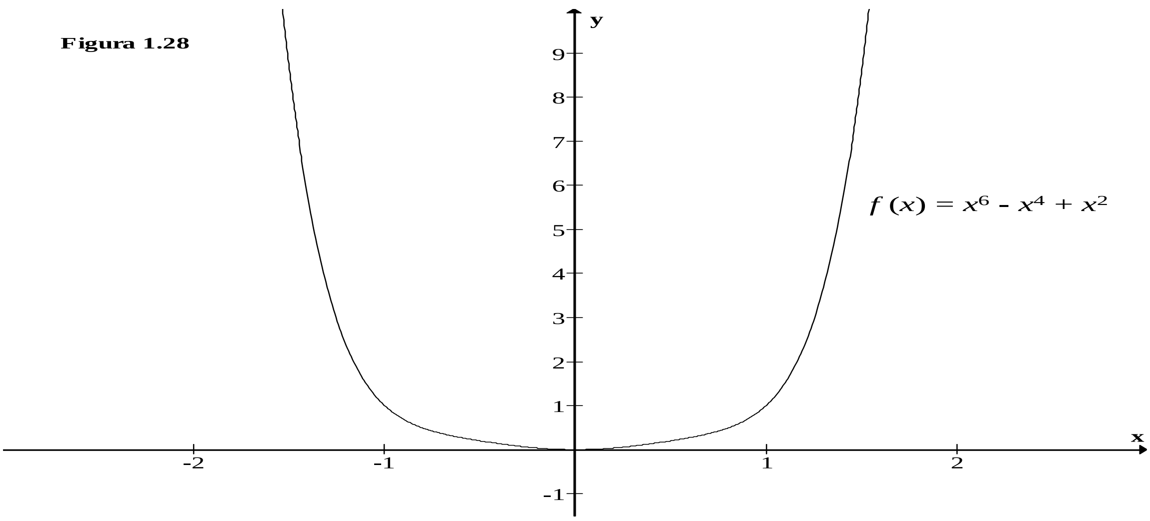
Ejemplos 1.27.

1) La función $f(x)=x^6-x^4+x^2$, es simétrica con respecto al eje *y*, pues $f(-x)=f(x)$.

En efecto, $f(-x)=(-x)^6-(-x)^4+(-x)^2=x^6-x^4+x^2=f(x)$, lo que verifica que la función *f* es simétrica con respecto al eje *y*.

La gráfica de $f(x)=x^6-x^4+x^2$, es mostrada en la figura siguiente:

Figura 1.28

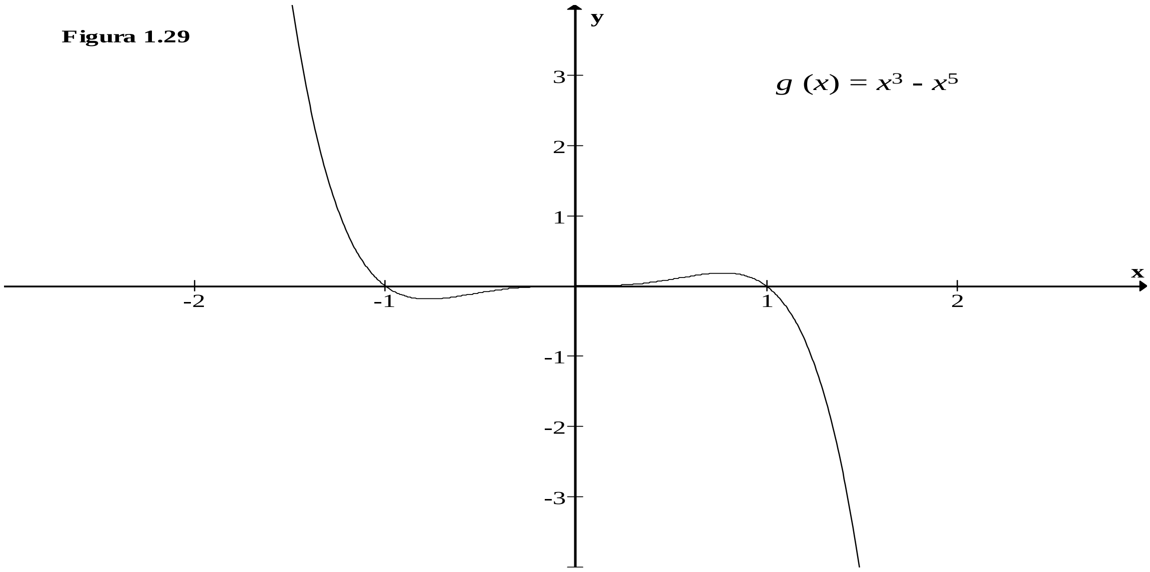


2) La función $g(x)=x^3-x^5$, es simétrica con respecto al origen, puesto que $g(-x)=-g(x)$.

Efectivamente, $g(-x)=(-x)^3-(-x)^5=-x^3+x^5=-\left(x^3-x^5\right)=-g(x)$, por lo tanto, la función *g* es simétrica con respecto al origen.

La gráfica de g es presentada en la figura 1.26.

Figura 1.29



No hemos considerado la simetría con respecto el eje x, sencillamente, porque estamos estudiando solamente las simetrías de las gráficas de funciones.

1.50. Criterio para funciones pares e impares.

La función $y = f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$.

La función $y = f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

Toda función par es simétrica con respecto al eje *y*, y toda función simétrica con respecto al eje *y* es par. Así mismo, toda función impar es simétrica con respecto al origen, y toda función simétrica con respecto al origen es impar.

Refiérase a las figuras 1.25 y 1.26. La figura 1.25 es la gráfica de la función $f(x) = x^6 - x^4 + x^2$, la cual es simétrica con respecto al eje *y*, por ende, dicha función es par. La figura 1.26 es la gráfica de la función $g(x) = x^3 - x^5$, la cual es simétrica con respecto al origen, y así podemos asegurar que *g* es una función impar. A continuación se proporcionan otros ejemplos.

Ejemplos 1.29.

1) La función $f(x) = x^2$ es par, puesto que, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
2) La función $g(x) = x^3$ es impar, ya que, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

1.51. Función inyectiva.

Una función *f* es inyectiva si a elementos diferentes del dominio de *f* le corresponden elementos diferentes del rango.

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; a = b.$$

Ejemplo 1.30.

La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x-1$ es inyectiva, puesto que $f(a)=f(b) \Rightarrow 2a-1=2b-1 \Rightarrow 2a=2b \Rightarrow a=b.$

1.52. Función sobreyectiva.

Una función *f* es sobreyectiva cuando los elementos del rango tienen una o varias contraimágenes del dominio de *f*.

Ejemplo 1.31.

La función $g:\mathbb{R}\to[0;+\infty)$ definida por $g(x)=x^2$ es sobreyectiva, pues a cada elemento del intervalo $[0;+\infty)$ le corresponden dos contraimágenes con excepción del 0 que le corresponde una sola contraimagen.

1.53. Función biyectiva.

Una función *f* es biyectiva, si y sólo si, es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 1.32.

La función del ejemplo 1.30 es biyectiva, pues es inyectiva y sobreyectiva.

1.54. Ejercicios propuestos.

Dadas las siguientes funciones:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3$. b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\sqrt{x^3-8}$.

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{4\}$ definida por $h(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x-3}}{x^2-16}$. d) $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $r(x)=\dfrac{x^4-36}{2x}$.

1) Determine cuál de las funciones anteriores es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
2) Determine cuál o cuales de las funciones anteriores son pares o impares.
3) Determine la simetría de las funciones anteriores.
4) Determine:

4.1) $(f\circ g)(x)$. 4.2) $h(r(x))$. 4.3) $(g\circ r)(x)$.